MOVIMIENTOS EN UNA Y DOS DIMENSIONES

1. ¿Cómo se describen los movimientos?

La descripción física de un fenómeno, como por ejemplo los movimientos, se hace en términos de la constancia de determinada magnitud.

1.1 Las ecuaciones de movimiento de los cuerpos

Las ecuaciones de movimiento permiten conocer los valores de las magnitudes cinemáticas en función del tiempo.

Para resolver problemas de movimientos se sigue el siguiente proceso:

- Se establece primero la magnitud que permanece cte.
- A partir de la expresión matemática de dicha magnitud cte, se deduce el resto de magnitudes necesarias.

1.2 Las gráficas del movimiento:

Los movimientos pueden ser representados tanto mediante una ecuación como a través de una gráfica. Las gráficas que representan el movimiento son de:

Posición-tiempo, velocidad-tiempo y Aceleración-tiempo.

2. Movimientos en una dimensión: Movimientos rectilíneos.

Son aquellos en las que el cuerpo solo se desplaza en una dirección. El desplazamiento o variación posicional coincide con la distancia o espacio recorrido siempre que no exista cambio de sentido en el transcurso del movimiento.

Dentro del Sistema de referencia se tomará el eje x cuando el movimiento sea horizontal y el eje y cuando sea vertical.

Las magnitudes cinemáticas vectoriales operan en el movimiento rectilíneo en la dirección del movimiento, por lo que se emplean signos + y -.

2.1 M.R.U

El movimiento rectilíneo uniforme es aquel que transcurre con velocidad cte.

El m.r.u es un movimiento bastante raro, pero se toma como referencia para otros tipos de movimiento.

Un cuerpo que se desplaza con m.r.u recorre la misma distancia en intervalos de tiempo iguales.

Ecuación del m.r.u

Como v = cte no existe aceleración. Así pues, la única ecuación es la de posición;

La velocidad media en un movimiento que va solo en una dirección es igual a:

$$Vm = \frac{\Delta x}{\Delta t} .$$

Con esta ecuación es posible determinar el valor de la posición x en función de t. Quedando pues: $x - x_o = u\ (t - t_o)$.

Cuando $t_o = 0$ la ecuación es: $x = x_o + u\ t$.

Esto es + si el cuerpo se aleja del punto de referencia.

Es decir si $x > x_o$.

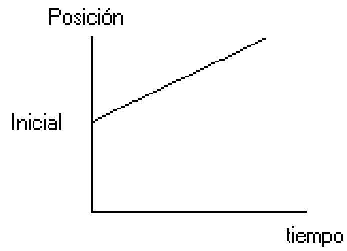
Pero puede ocurrir que $x_o > x$ por lo que el cuerpo se acerca al sistema de referencia y el valor se pone .

La ecuación general es: $x = x_o \pm vt$.

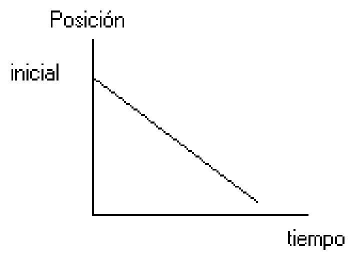
La ecuación general en forma vectorial es $\vec{r} = \vec{r}_o \pm \vec{v} \cdot t$

Gráficas del m.r.u

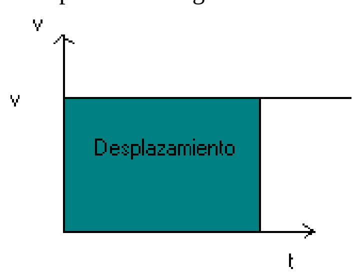
Cuando el móvil se aleja del sistema de referencia:



Cuando se acerca al sistema de referencia:



La representación gráfica de v frente a t es una recta horizontal:



El área coloreada representa el desplazamiento o camino recorrido en t.
El área coloreada es un rectángulo cuya base es el valor del tiempo transcurrido y cuya altura es la velocidad, por lo que su área es $v \cdot t$. Considerando la ecuación de posición queda: $x - x_o = vt$ ó $\Delta x = vt$

Por tanto el área representa el desplazamiento Δx.

2.2 MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS CON ACELERACIÓN CTE.

Cuando el movimiento de rectilíneo y con aceleración cte, en intervalos de tiempos iguales, la velocidad aumenta o disminuye en la misma cantidad.

La velocidad en el m.r.u.a

- Ecuación de la velocidad: $v - v_o = a\,(t - t_o)$

Si $t_o = 0$ la ecuación es:

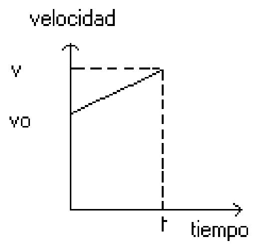
$$v = v_o + at$$

Estas ecuaciones son cuanto la aceleración tiene signo +. Se pone signo + a la aceleración cuando v se hace mayor que v_o, es decir, cuando su sentido coincide con v_o. Se le pondrá – cuando v sea menor que v_o, es decir, cuando su sentido sea el contrario.
La ecuación en forma vectorial es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \pm \vec{a}t$$

Gráfica de velocidad:

Si se representa gráficamente la velocidad frente al tiempo fijando unos valores para v_o y la aceleración y dando unos valores al tiempo, el resultado es una recta:



La pendiente de esta recta de ecuación $v = v_o \pm at$ representa la aceleración del movimiento

El teorema de la velocidad media:

Si el producto de v·t representa el espacio recorrido cuando v es cte, entonces, cuando la velocidad cambia de modo uniforme (con aceleración cte) desde un valor inicial v_o hasta un valor final v, el espacio recorrido debe ser el mismo que el que se recorrería con la velocidad promedio entre v_o y v ;

$$Vm = \frac{(v_{inicial} + v_{final})}{2}$$

Ecuación de posición:

La ecuación de posición que nos informa de la posición en función del tiempo cuando un cuerpo que se mueve con m.r y aceleración cte es :

$$x = x_o \pm v_o t \pm \frac{1}{2} at^2$$

Los signos + se ponen cuando el móvil se aleja del punto de referencia y – cuando se acerca. Utilizando las dos ecuaciones de posición y velocidad obtenemos una útil fórmula:

$$v^2 = v_o^2 \pm 2 \cdot as$$

2.3 Los movimientos con aceleración constante en la naturaleza

La caída libre de los cuerpos: Un desafío al sentido común

Si no se considera la resistencia del aire, todos los cuerpos, independientemente de su masa, caen con la misma aceleración y, por tanto, llegan a la misma vez al suelo partiendo desde la misma altura.

La aceleración que la Tierra (u otro cuerpo celeste, como la Luna) comunica a los cuerpos es independiente de la misma de la masa de éstos.

- **Para un observador que deja caer un cuerpo,** éste va alejándose verticalmente en el mismo sentido de actuación de g. La posición inicial es 0. y_o =0, pues coincide con el propio observador, y la velocidad aumenta en el sentido de la caída.
  Por tanto, las ecuaciones son:
  - Ecuación de velocidad: $v = g \cdot t$
  - Ecuación de posición (altura) : $y = \frac{1}{2} g \cdot t$
- **Para un observador situado en el suelo,** el cuerpo se halla inicialmente a una altura que designaremos y_o. El cuerpo que cae hacia él, aumentando la velocidad a medida que se acerca, debido a que g se dirige hacia el observador.
  Por lo que las ecuaciones son:

- Ecuación de velocidad: $v = -g \cdot t$
- Ecuación de posición: $y = y_o - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

El signo – no tiene valor real, indica que el objeto se acerca.

Lanzamiento vertical hacia arriba

Las ecuaciones que describen el lanzamiento vertical hacia arriba de un cuerpo son:

- Ecuación de velocidad: $v = v_o - gt$
- Ecuación de posición (altura): $y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$

Si se lanza desde el suelo $y_o = 0$.

En la altura máxima, la velocidad del cuerpo se hace 0. Se considera cero la velocidad y se despeja el tiempo –ese es el tiempo que tarda en ascender:

$$v = v_o - gt \ ; \quad O = v_o - gt \longrightarrow t = \frac{v_o}{g}.$$

AL sustituir ese tiempo en la ecuación de altura, se obtienen la altura máxima:

$$y_{\max} = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

$$y_{\max} = v_o \left(\frac{v_o}{g} \right)^2 - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o}{g} \right)^2 = \frac{{v_o}^2}{2g}.$$

Cuando se pide cualquier cosa relativo a la llegada al suelo del cuerpo, hay que saber que la velocidad de llegada al suelo no es igual a 0. Aquí la velocidad tiene su máximo valor. 0 es la altura.

Al llegar al suelo, la altura del cuerpo es cero.

Se considera cero la altura y se despeja el tiempo total de vuelo, quedando:

$$t_{vuelo} = \frac{2 v_o}{g} \quad .$$

Si se sustituye el tiempo total de vuelo en la ecuación de velocidad:

$$v = v_o - gt$$

$$v = v_o - g \left(2 \frac{v_o}{g} \right) = -v_o$$

Con esto se saca que tarda lo mismo en ascender hasta la máxima altura que en descender desde ese punto hasta el suelo. También la velocidad con la que llega al suelo es igual a la que tenía inicialmente solo que de signo opuesto.

3.Movimientos en dos dimensiones. Movimientos parabólicos.+

Los movimientos parabólicos pueden ser tratados como una composición de dos movimientos rectilíneos: uno horizontal con velocidad cte (MRU) y otro vertical con aceleración cte (MRUA).

El movimiento de media parábola, lanzamiento horizontal, puede considerarse como la composición de un movimiento rectilíneo uniforma de avance horizontal y un movimiento de caída libre.

El movimiento parabólico puede considerarse como la composición de un movimiento rectilíneo uniforme de avance horizontal y un movimiento vertical hacia arriba.

Notas:

- Un cuerpo lanzado horizontalmente y otro que se deja caer libremente desde la misma altura tardan lo mismo en llegar al suelo.
- Dos cuerpos, lanzados uno verticalmente hacia arriba y el otro parabólicamente, que alcancen la misma altura, tardan lo mismo en caer al suelo.
- La independencia de la masa en la caída libre y el lanzamiento vertical es igualmente válida en los movimientos parabólicos.

3.1 Lanzamiento horizontal

Ecuación de posición
($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$)

Componente horizontal de avance (MRU)

$$x = v_o t$$

Componente vertical de caída (MRUA)

$$y = y_o - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Si se combinan esas dos ecuaciones queda la **ecuación del la trayectoria:** $y = y_o - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o} \right)^2$.

Ecuación de velocidad
($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$)

Velocidad de avance horizontal:

$$v_x = v_o$$

Velocidad de caída vertical:

$$v_y = -gt$$

El valor de la velocidad viene dado por: $v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y}$

3.2 Movimiento parabólico completo:

La velocidad inicial tiene dos componentes: v_{ox} y v_{oy} que valen:

$v_{ox} = v_o \cdot \cos a$
$v_{oy} = v_o \cdot sen a$

Dichos componentes producen el avance (v_{ox}) y la elevación (v_{oy}).

Ecuación de posición:
($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$)

Componente horizontal de avance:

$$x = v_{ox} t$$

Componente vertical de altura:

$$y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Ecuación de velocidad:
($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$)

Velocidad del avance horizontal

$$v_x = v_{ox}$$

Velocidad de caída vertical

$$v_y = v_{oy} - gt$$

En los casos en los que exista altura inicial y_o la ecuación de la altura es :

$$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

4. Movimientos circulares:

El movimiento circular uniforme es un movimiento acelerado, dotado únicamente de aceleración centrípeta.

La rapidez con que varía el ángulo q descrito proporciona una medida de la velocidad del movimiento circular. A esa velocidad relacionada con el ángulo se la denomina <<velocidad angular>>, que se simboliza como v y que, en términos de velocidad angular media, se expresa como: $v = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

La unidad de velocidad angular es rad/s.

Relación entre velocidad angular y lineal

Módulo de velocidad lineal es: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Pero según la definición: $\Delta s = \Delta q r$ .Así que:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta q r}{\Delta t} = wr .$$

w es una magnitud vectorial, y la relación con la velocidad lineal, expresada vectorialmente es:
$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$

$\vec{w}$ es perpendicular al plano del movimiento.

El vector $\vec{w}$ permanece cte en el movimiento así que se define: el movimiento circular uniforme es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y que transcurre con velocidad angular cte.

Ecuación del movimiento circular uniforme:

Dado que: $w = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ entonces $\Delta q = w \Delta t$; o bien $q - q_o = w(t - t_o)$

Si $t_o \longrightarrow q = q_o + w \cdot t$

w es positivo cuando da un giro contrario a las agujas del reloj y negativo cuando lo hace con el sentido de las agujas.

Por lo que la ecuación de posición angular es: $q = q_o \pm wt$

Y representa la ecuación del movimiento circular uniforme.

- **Periodo** es el tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta completa. Se mide en segundos.
- **Frecuencia** es el número de vueltas por unidad de tiempo. Su unidad es s^{-1} o hertzio (Hz).

Aceleración centrípeta en el movimiento circular uniforme. La expresión que relaciona la aceleración centrípeta: $a_c = \frac{v^2}{r}$. Como $v = wr$: $a_c = \frac{(wr)^2}{r} = w^2 r$

$w = 2p / T$. La aceleración de la gravedad es la aceleración centrípeta:

$$a_c = \left(\frac{2p}{t}\right)^2 r = \left(\frac{4p^2}{T^2}\right) r .$$

4.2 Movimiento circular uniformemente acelerado.

La aceleración angular es la rapidez con que varía la velocidad angular. $a = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ La unidad de aceleración es el rad/s^2. Si $a = cte$ se dice que el MC es MCUA.

Relación entre aceleración angular y lineal:

$a_t = ar$.

Ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado.

$a = \frac{(w - w_o)}{t}$ por tanto : $w = w_o + at$

El ángulo descrito en función del tiempo es: $q = q_o + w_o t + \frac{1}{2} a t^2$. El MC puede ser acelerado, por lo que a puede ser negativo.

Así pues, las ecuaciones que describen el movimiento uniformemente acelerado son:

Ecuación de velocidad angular: $w = w_o \pm at$

Ecuación de posición angular: $q = q_o \pm w_o t \pm \frac{1}{2} a t^2$