

*** Objetivos del Trabajo Práctico :**

- Comprobar y fijar el análisis cinemático del movimiento en un plano ;
- Corroborar la certeza de las ecuaciones , en especial , la ecuación de la trayectoria para el movimiento estudiado ;
- Verificar la validez del Principio de Independencia de los movimientos ;
- Determinar gráficamente algunos parámetros del movimientos ;

*** Materiales Utilizados :**

- 1 plano de vidrio con una plataforma de acero , con capacidad de regulación de altura a través de un tornillo en cada apoyo de la misma . La limpieza y calidad del mismo eran precarias ;
- 1 disparador (o lanzador) que estaba constituido por un paralelepípedo hueco ranurado de metal , también precario ;
- 1 rodamiento de metal (de carácter esférico) , de peso considerable para vencer rozamientos ; de calidad admirable y eficiencia total ;
- 1 chapa de metal , contenedora de la esfera ;
- 1 nivel de madera ;
- 4 cronómetros : tres (3) de ellos de calidad digital con precisión 1/100 de botones sensibles y uno (1) de calidad analógica con la misma precisión pero con botones mecánicos (este último mal calibrado) ;
- 1 cartulina blanca de espesor despreciable y de dimensiones acordes con las del plano (preferentemente que lo cubra) ;
- Cinta Adhesiva (en pequeños trozos) ;
- 2 papeles carbónicos (de dimensiones parecidas a la cartulina) ;
- 1 regla milimetrada transparente de 50 cm de longitud ;
- 1 escuadra no milimetrada ;
- Lápices mecánicos con mina de 0,5 mm (H.B.) .-

*** Marco Teórico :**

Para comenzar ésta introducción teórica debemos decir que el movimiento compuesto a estudiar conformado por un Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.) en el eje horizontal , y un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A.) en el eje vertical (semejante a la caída libre) .

Es por ello que daremos algunas nociones sobre estos movimientos , para entender un poco sus funcionamientos :

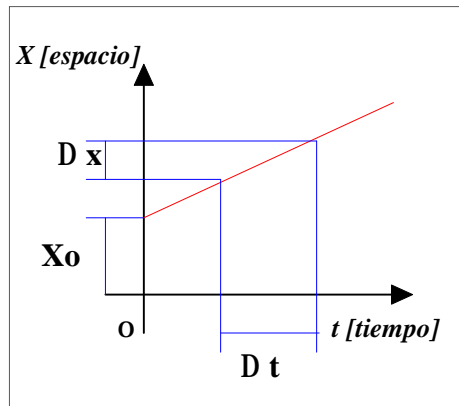
- Movimiento Rectilíneo Uniforme : Definición = “ Un movimiento es uniforme cuando el móvil recorre espacios iguales en tiempos iguales “.

Podemos comenzar definiendo que es la Velocidad (V) = es el cociente entre el espacio recorrida (x) y el tiempo (t) empleado en recorrerla :

$$V = x / t \text{ ----> } \underline{V = Dx / Dt}$$

reco * Representa el Espacio
rrido en cada unidad de Tiem
po .

Matemáticamente , ésta relación de Velocidad , podemos afirmar que es un Cociente Incremental , es decir que representa la pendiente de la curva dada :



$$V = (X - X_0) / (t - t_0) \text{ ----> como } t_0 = 0 .$$

$$V \cdot t = X - X_0$$

$$\underline{X = X_0 + V \cdot t}$$

- Características del M.R.U :

- a) El Espacio Recorrido es proporcional al Tiempo en el que se lo recorrió ;
- b) La Velocidad es constante (no varía durante todo el tiempo) .-

- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.A.) : Definición=
“ Como analogía del M.R.U. podemos evaluar , en un principio , que el M.R.U.V. es aquel cuya Velocidad no es constante Es decir que experimenta variaciones de Velocidad (posee **Aceleración** , pero ya veremos lo que esto significa) y como es variado uniformemente , podemos decir que dichas variaciones las realiza en lapsos iguales (o tiempos iguales) “.

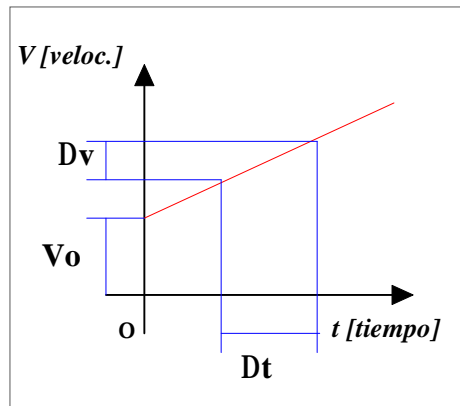
Es así como llegamos al concepto de Aceleración : es el cociente entre un ΔV y el tiempo (t) en el que se produce ; es decir , que a toda variación de velocidad le corresponde su aceleración =

$$\underline{a = \Delta v / \Delta t}$$

$\Delta v = a \cdot t$
 $\Delta t = \Delta v / a$

Pero podríamos explicar cual es el significado físico de la Aceleración : la cual representa la variación de Velocidad en cada unidad de tiempo , es decir , es la rapidez con que cambia la Velocidad .

La representación de la $V = f(t)$ es una curva lineal donde la Aceleración (a) es su pendiente :



$$a = (V - V_0) / (t - t_0) \text{ ----> como } t_0 = 0$$

$$a \cdot t = V - V_0$$

$$\underline{V = V_0 + a \cdot t}$$

Pero si hablamos del espacio recorrido (X) , tendremos que decir que su representación gráfica es una cónica conocida como *Parábola* o *Función Cuadrática* (ya que el grado mayor del polinomio es un cuadrado - 2 -) , a la cual se llega a través del siguiente análisis :

* Podríamos decir que tanto en el M . R . U . como el M . R . U . V . , el Espacio (X) está representado por al área de la figura ABED , por lo tanto sería :

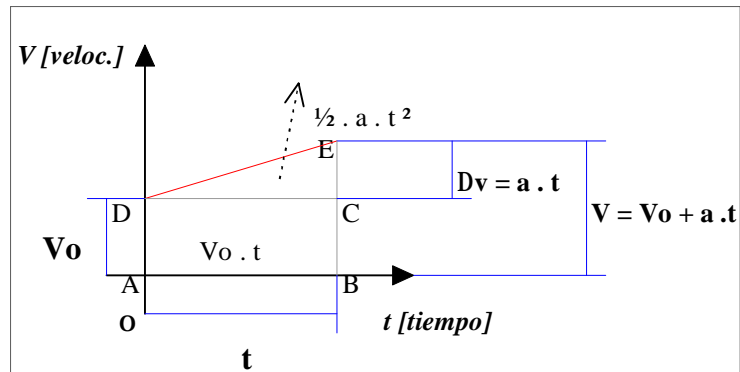
$$\text{Área ABED} = \text{Área ABCD} + \text{Área DCE}$$

$$\Delta X = b \cdot h + \frac{b \cdot h}{2}$$

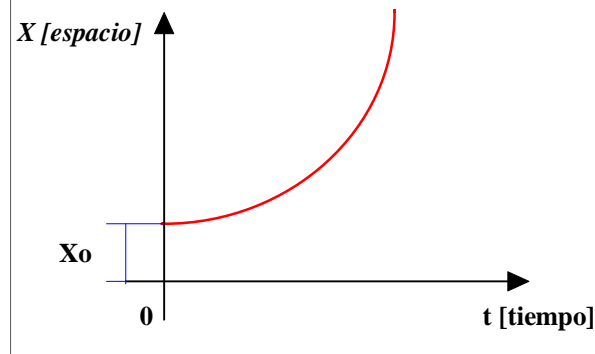
$$\Delta X = V_0 \cdot t + \frac{t \cdot (a \cdot t)}{2}$$

$$\Delta X = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$X = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$



La ecuación tendrá la siguiente gráfica :



- Características del M.R.U.V. :

- a) La variación de ;a Velocidad es directamente proporcional al tiempo en que se efectúa ;
- b) El Espacio (X) depende del cuadrado del Tiempo (t) ;
- c) Si la Vo es nula , el camino recorrido es directamente proporcional al t² :

$$\frac{X_1}{t_1^2} = \frac{X_2}{t_2^2} = \frac{X_3}{t_3^2} = \dots = \text{cte.}$$

Esto quiere decir que si en un determinado tiempo (t) el móvil recorre un cierto espacio (x) , en más tiempo recorrerá mayor espacio .

Pero como sabemos , el movimiento realizado en el plano inclinado es un movimiento COMPUESTO , es decir que analizaremos si cada movimiento por separado influye en el otro con un *ejemplo* :

* Si tenemos una esfera apoyada en una mesa , ¿ será lo mismo si la dejamos caer , que si la empujamos con el dedo ? :

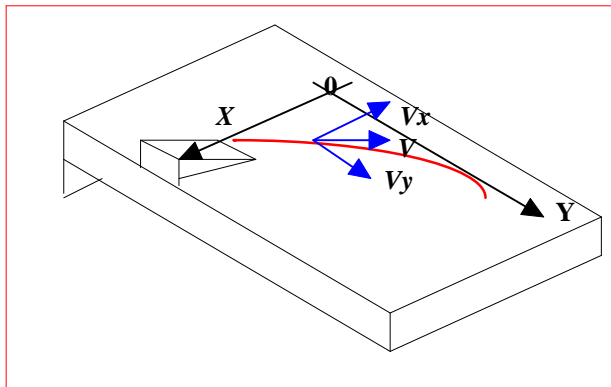
1) Influye la traslación horizontal sobre la caída libre = ésta última sólo tiene un movimiento , el de CAÍDA ; en cambio , si le proveemos una cierta traslación anterior a la caída , poseerá dos de ellos : el de TRASLACIÓN HORIZONTAL , que es *uniforme* ; y el de CAÍDA LIBRE (que es *uniformemente acelerado*) . Ambas tardan el mismo tiempo en caer , por lo tanto , el movimiento horizontal no influye en el de caída.

2) Influye la Caída Libre sobre la Traslación Horizontal = NO , pues la esfera avanzará igualmente (en términos de espacio) si posee Traslación Horizontal o si se le agrega la Caída Libre .

Con esto , podemos exponer un principio , el cual enuncia la independencia de los movimientos simples cuando se combinan (*Principio de Independencia de los Movimientos*) :

“ Si un cuerpo tiene un movimiento compuesto , cada uno de los movimientos componentes se cumplen como si los demás no existiesen “.

Ahora bien , como tanto el movimiento sobre un Plano Inclinado y el Tiro Oblicuo son movimientos Compuestos (y además su trayectoria está conformada por una Parábola) y sus Velocidades y Aceleraciones son magnitudes Vectoriales , cada una de ésta últimas puede descomponerse (en cada punto de la curva) como una suma vectorial : V_x y V_y .



- Velocidad del Movimiento Horizontal : $V_x = V_o \cdot \cos \alpha$

- Velocidad del Movimiento Vertical : en el inicio $V_y = V_o \cdot \sin \alpha$ pero va disminuyendo a medida que transcurre el tiempo : $V_y = V_o \cdot \sin \alpha - g \cdot t$

La Velocidad Total en cada punto de la curva (V) siempre será tangente a la curva que realiza la esfera .

Podemos considerar muy parecidos a ambos movimientos (Plano Inclinado y Tiro Oblicuo) , por lo tanto , son análogos en la conformación de sus movimientos (ambos tienen un M.R.U. - eje X - y M.R.U.V. - eje Y -) y podemos definir la Altura máxima (H_{máx}) que alcanzará un supuesto proyectil al ser lanzado :

1) $H = V_0 \cdot \text{sen } a - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ —————> y con $V_y = 0$ en el Vertice de la Parábola

$$H = V_0 \cdot \text{sen } a \cdot V_0 \text{sen } a - \frac{1}{2} \cdot V_0^2 \text{sen}^2 a$$

$$V_y = V_0 \cdot \text{sen } a - g \cdot t$$

$$0 = V_0 \cdot \text{sen } a - g \cdot t$$

$$\frac{V_0 \cdot \text{sen } a}{g} = t \rightarrow \text{ se reemplaza en (1)}$$

$$H_{\text{máx}} = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}^2 a}{2 \cdot g}$$

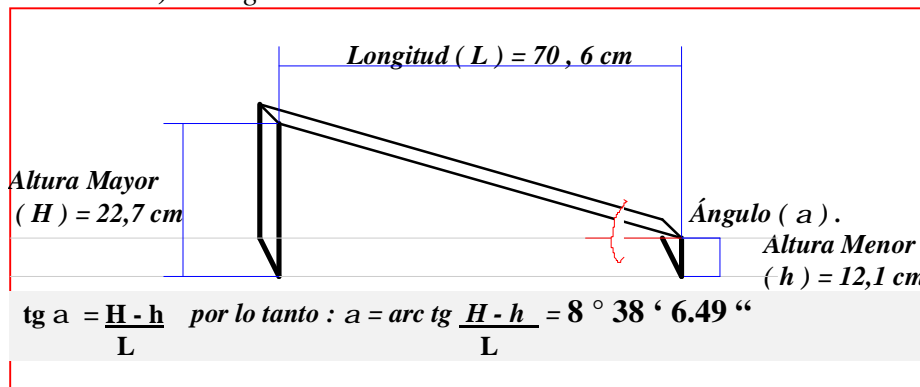
$$X_{\text{máx}} = V_0 \cdot \text{cos } a \cdot t$$

*** Desarrollo del Trabajo Práctico :**

Para hacer la experiencia se cuenta con un *Plano de Vidrio* inclinable , a través de un soporte de acero regulable (en sus apoyaturas) por medio de tornillos .

Primero debe regularse la altura o inclinación del Plano . Luego , por medio de un *Nivel* debe controlarse la planaridad del vidrio con respecto a sus soportes . A continuación , debe comprobarse la nivelación en sentido transversal . Esto se realiza mediante el lanzamiento de la *Esfera de Metal* por sobre el plano , en forma paralela al borde del mismo .

Una vez hecho esto , se procede a medir la *Altura Mayor (H)* del Plano (desde la mesa hasta el vidrio) y la *Altura Menor (h)* . Seguidamente se tomará medida de la *Longitud (L)* del mismo , para así obtener a través de un cálculo (que contiene una relación trigonométrica) el *Ángulo de Inclinación del Plano* :



Luego , se deben realizar diferentes tiros de práctica , con la misma Velocidad Inicial (V_0) que se utilizará para graficar luego la traza de la trayectoria y se tomarán sus respectivos tiempos para ejercitar el uso de los *Cronómetros* .

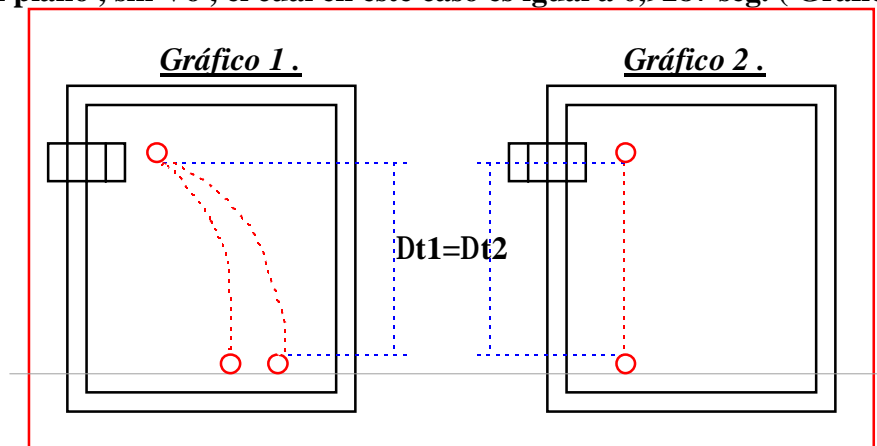
Se anotarán los valores de cada uno de los tiempos de las personas que controlaron , y éstas determinarán cuál fue su mejor medición . Caso contrario (es decir , que no puedan determinar su mejor medición) se buscará el promedio de todas las mediciones realizadas por esa persona .

Una vez terminada la ejercitación con los cronómetros , se buscará (a través de promedios y discusiones lógicas) prefijar el tiempo en el cual la esfera recorre todo el plano (Gráfico 1) aproximadamente , para :

$$V_0 \text{ menor} = 0,992 \text{ seg .}$$

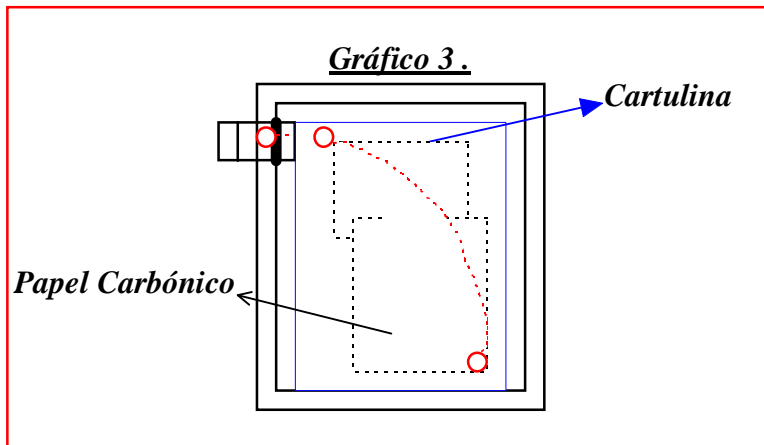
$$V_0 \text{ mayor} = 0,9525 \text{ seg .}$$

También se tomará el tiempo que tarda la esfera en recorrer (paralelamente al borde) todo el plano , sin V_0 , el cual en este caso es igual a 0,9287 seg. (Gráfico 2) .



Una vez terminado esto se procede a cubrir el vidrio con la *Cartulina* (procurando que la misma cubra toda la supuesta trayectoria de la esfera) y se la pega en los bordes del plano con *Cinta Adhesiva* . Debe asegurarse de que la cartulina no ofrezca ningún tipo de dificultad a la esfera (tal como dobleces , arrugas , etc .) . Luego , se cubre la superficie de la cartulina con *Papel Carbónico* teniendo en cuenta que éste también debe cubrir la trayectoria de la esfera y no ofrecer dificultades a la misma (se lo sujetará también con cinta adhesiva en los extremos) .

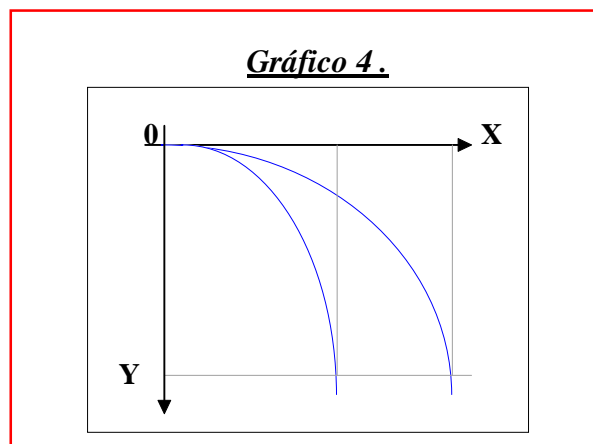
Se coloca la *Chapa Contenedora* en la primera ranura del Disparador (menor V_0) y se inserta la esfera por el lado opuesto del disparador . Después , una vez que la esfera se “ apoya “ en la chapa contenedora , se procede a levantar la misma para dejar que la esfera rueda por sobre el carbónico y marque la traza número 1 (Gráfico 3) :



Se realiza lo mismo para la traza número 2 pero con la chapa contenedora en la 3^o ranura .

Una vez obtenidas las trazas se procede a sacar la cartulina (y el carbónico) con cuidado de no romperla ni mancharla . Luego , se marca un sistema de Ejes Cartesianos (x , y) en el punto inicial de las trazas y también se dibujan dos líneas paralelas a los ejes : una de ellas (la paralela al eje X) determinará , al cortar con la curva el punto final de análisis del recorrido ; la otra (paralela al eje Y) irá desde el punto final de la traza , hasta intersectarse con el eje de las X , teniendo así el recorrido trasladado al eje horizontal (idem para la traza 2) .

Una vez obtenido esto se procede a dividir el valor de la proyección del punto de intersección de la línea final con el recorrido (1) , en 10 subdivisiones ($Dx = Dt$) y a través de la curva , se obtienen las correspondientes a ellas ($Dy = Dx - \text{recorrido} -$; Gráfico 4) :



Idem para la trayectoria 2 .

Estos valores deben volcarse en tablas (ver Tablas de Valores) . Una vez finalizado este proceso , debe elegirse un punto de un recorrido (al azar) para graficar la Velocidad en ese punto a escala (la cual es tangente a la curva) , y descomponerla en V_x y V_y ; idem para la aceleración (pero en este caso se graficará la a_y y se obtendrán las Componentes Intrínsecas (a_t y a_n) :

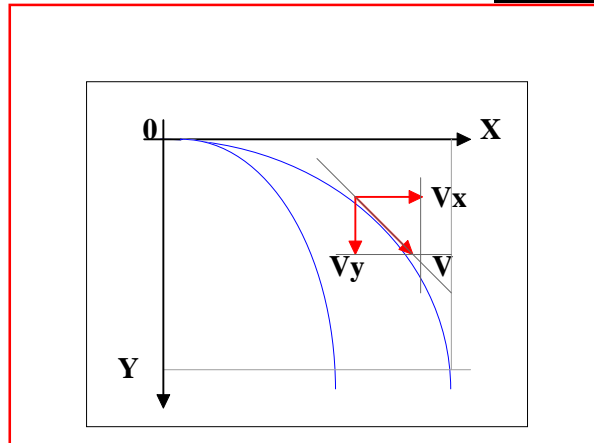
*** Procedimiento para la Comprobación gráfica de a y V en un punto del recorrido :**

A) Velocidad en un punto (pasos a seguir) =

- Trazar la tangente a la curva en el punto deseado ;
- Trazar la paralelas a los ejes X e Y en el mismo punto ;
- Calcular la V_x del punto elegido : medir el espacio o subdivisión y marcar el vector correspondiente sobre la paralela al eje trazada en ese punto ;
- Marcar el vector (tangente a la curva) cuyo extremo estará dado por la intersección entre la paralela a eje Y y la tangente a la curva (Regla del Paralelogramo) ;
- Medir , tanto los vectores V_y y V_x como V , y comparar con los valores calculados:

Mediciones : $V_x = 3,64 \text{ cm}$; $V_y = 9,1 \text{ cm}$; $V = 9,8 \text{ cm}$.

Escala : $1 \text{ cm} = 10,49 \text{ cm/seg}$.



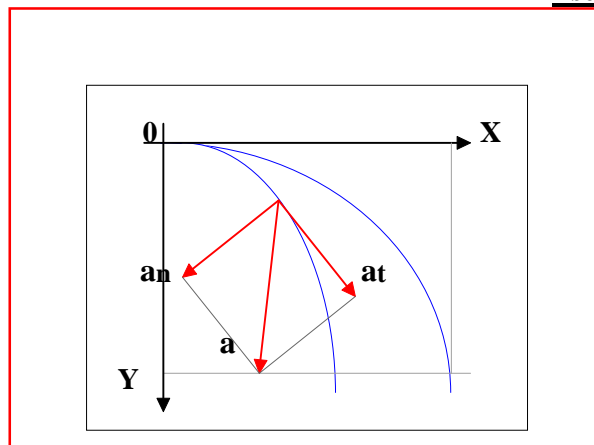
B) Aceleración en un punto (pasos a seguir) :

- Trazar la tangente a la curva en el punto deseado ;
- Idem Velocidad en ;

- Calcular la a del punto elegido a través de los valores de la tabla: volcar ese valor sobre la paralela del eje Y con su escala correspondiente (el valor de la aceleración calculada será el valor de a_y , en sentido vertical).
- Trazar una recta perpendicular a la tangente en el punto y a la vez una paralela a dicha tangente y a dicha perpendicular ; formando de esta manera , el paralelogramo a través del cual se obtendrán las componentes Intrínsecas de la Aceleración calculada y graficada) ;
- Comparar el valor de las componentes Intrínsecas con los calculados :

Mediciones : $a_n = 3,95 \text{ cm}$; $a_t = 12,65 \text{ cm}$; $a = 13,21 \text{ cm}$.

Escala : $10 \text{ cm} = 1 \text{ m/s}^2$.



* Cálculos para los Gráficos :

A) Para el gráfico de las Velocidades (Vo mayor):

$$V_y = \frac{Y(8) - Y(7)}{t(8) - t(7)} = 1,0179 \text{ m/s}$$

$$V_x = \frac{X(8) - X(7)}{t(8) - t(7)} = 0,3819 \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 1,0872 \text{ m/s}$$

B) Para el gráfico de las Aceleraciones (Vo menor) :

$$a(7) = 2 \cdot Dy / Dt^2 = 1,3211 \text{ m/s}^2$$

*** Cálculos y Tablas de Valores :**

TABLA DE VALORES PARA Vo MAYOR:

<i>Divisiones</i>	<i>X (cm)</i>	<i>Y (cm)</i>	<i>t (seg)</i>	<i>t² (seg²)</i>
1	3,64	0,3	0,09529	0,00908
2	7,28	1,8	0,19058	0,03632
3	10,92	4,45	0,28587	0,08172
4	14,56	8,4	0,38116	0,14528
5	18,2	13,7	0,47645	0,227
6	21,84	20,35	0,57164	0,32689
7	25,48	28,55	0,66703	0,44493
8	29,12	38,25	0,76232	0,58113
9	32,76	49,45	0,85761	0,73549
10	36,4	62,15	0,9525	0,90802

TABLA DE VALORES PARA Vo MENOR :

<i>Divisiones</i>	<i>X (cm)</i>	<i>Y (cm)</i>	<i>t (seg)</i>	<i>t² (seg²)</i>
1	2,75	0,1	0,0992	0,0098
2	5,5	1,6	0,1984	0,0394
3	8,25	4,2	0,2976	0,0886
4	11	8,15	0,3968	0,1575
5	13,75	13,45	0,496	0,246
6	16,5	20,45	0,5952	0,3543
7	19,25	28,7	0,6944	0,4822
8	22	38,45	0,7936	0,6298
9	24,75	49,7	0,8928	0,7971
10	27,5	62,05	0,992	0,9841

Hoja: 12/13

* Cálculos Adicionales :

Aceleración del Plano :

$$\begin{aligned} \mathbf{a_p} &= g \cdot \text{sen } a \\ &= 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen} (8^\circ 38'6.49'') \\ &= 1,47139 \text{ m/s}^2 . \end{aligned}$$

Componentes Intrínsecas :

$$\begin{aligned} \mathbf{a_n} &= \mathbf{a_p} \cdot \text{sen } a = \mathbf{a_p} \cdot (V_y / V) \\ &= 1,47139 \text{ m/s}^2 \cdot (41,33 \text{ cm/s} / 49,76 \text{ cm/s}) \\ &= 1,222 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a_t} &= \mathbf{a_p} \cdot \text{cos } a = \mathbf{a_p} \cdot (V_x / V) \\ &= 1,47139 \text{ m/s}^2 \cdot (27,72 \text{ cm/s} / 49,76 \text{ cm/s}) \\ &= 0,81967 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_n}^2 + \mathbf{a_t}^2 = 1,47 \text{ m/s}^2$$

* Comprobación Analítica con los gráficos (ver gráficos) :

- Para la Vo mayor (para los puntos 9 y 10) :

$$V = D_x / D_t = 0,384 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} Y &= k \cdot t^2 & \text{-----> pero } k &= D_y / D_t^2 = \underline{0,736 \text{ m/s}^2} \\ \text{por lo tanto : } 2 \cdot k &= a \\ 1,472 &= 1,47 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- Pero para los puntos de la Vo menor (los mismos que Vo mayor) tenemos que :

$$\begin{aligned} 2 \cdot k &= a \\ 2 \cdot (0,66) &= 1,47 \text{ m/s}^2 . \\ 1,32 &= 1,47 \text{ m/s}^2 . \end{aligned}$$

Notamos que hay una leve diferencia que será luego explicada en las *Conclusiones* .-

*** Conclusiones :**

Habiendo hecho todos los cálculos y apreciaciones posibles , he podido determinar (fehacientemente) , la veracidad del Principio de Independencia de los Movimientos .

Esto se debe a que hemos tratado de averiguar si la aceleración , de un tiro oblicuo en un plano , varía si modificamos la V_0 del disparo .

Debemos decir , en realidad , que si hallamos las aceleraciones en cada uno de los puntos de los dos tiros , la misma va aumentando en pocas dosis , pero haciendo aproximaciones puedo decir que se mantiene constante .

Este hecho se lo atribuyo a distintos motivos de error (paralelismo , perpendicularidad , mal control del tiempo , etc. .) y a que quizás la fuerza Peso (P) de la esfera fuera mucho mayor que la fuerza de reacción del plano , y que el rozamiento de la superficie.

Es por ello que digo , que para distintas V_0 , los movimientos : M.R.U. (en el eje horizontal) y M.R.U.A. (en el eje Y) , son independientes y se pueden combinar pero ninguno influye sobre el otro .

Con respecto a la a (Aceleración) graficada en un punto de la traza , podemos decir que es diferente a la calculada en dicho punto , debido a las aproximaciones , errores de dibujo y al hecho anteriormente nombrado del aumento progresivo pero pequeño de la aceleración de la esfera (a medida que la esfera toma mayor V_0 , su aceleración aumentará muy lentamente , y en pocas cantidades) .-

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA :

* *“Introducción a la Física I “ - Maiztegui - Sábado - Editorial Kapeluz
(1955)*

* *“Tratado Elemental de Física (tomo I) “ - Loyarte- Loedel
Editorial Estrada*