

INTRO. ESTUDIO DE LAS CÓNICAS

Una vez que se han estudiado los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de las figuras geométricas más elementales, las rectas, se pasará a hacer un estudio de algunas líneas curvas que pueden ser definidas, todas ellas, como lugares geométricos.

Las figuras que se van a estudiar son la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, pues todas ellas se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.

El estudio de las cónicas tiene su origen en el libro de Apolonio de Perga, *Cónicas*, en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos. Previamente a este trabajo existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose elipses, parábolas o hipérbolas según que el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso, respectivamente.

Si bien no disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquélla. Los resultados obtenidos por Apolonio fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone.

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

- La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.
- La órbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola.

Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire) es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

Una cónica puede considerarse como el resultado de cortar una superficie cónica con un plano; o como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la razón de sus distancias a un punto y a una recta es constante; o bien puede darse de ella una definición específica, que es lo que se va a desarrollar en este tema.

CIRCUNFERENCIA (I)

Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia fija llamada *radio*, de un punto dado, llamado *centro*.

Ecuación de la circunferencia

Ej. Considérese la circunferencia centrada en $O(a, b)$ y de radio r . La condición para que un punto $X(x, y)$ se encuentre en la misma es:

$d(X, O) = r$, es decir:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desarrollando los cuadrados se tiene:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Llamando $A = -2a$, $B = -2b$ y $C = a^2 + b^2 - r^2$, se tiene:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ejercicio: cálculo de la ecuación de una circunferencia

- Hallar la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $(5, -2)$ y de radio 3.

Resolución:

Ej.

- La distancia de $X(x, y)$ al punto $(5, -2)$ es

$$d = \sqrt{(x - 5)^2 + (y + 2)^2}$$

- Para que el punto esté sobre la circunferencia se ha de verificar:

$$\sqrt{(x - 5)^2 + (y + 2)^2} = 3 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$$

, Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $(1, 1)$ y que contiene al punto $(-2, 3)$.

Resolución:



$$r = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}$$

Así la ecuación es:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

f Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto (3, 4) y es tangente a la recta $x - 2y + 3 = 0$

Resolución:



- El radio es la distancia del centro a una recta tangente:

$$r = \frac{|3 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- La ecuación es:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4/5$$

$$5x^2 + 5y^2 - 30x - 40y + 121 = 0$$

„ ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos (3, 2), (2, 4) y (-1, 1)?

Resolución:



La ecuación de una circunferencia cualquiera es de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Para que dicha circunferencia contenga a todos los puntos dados, éstos han de verificar la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} (3, 2): \quad 3^2 + 2^2 + 3A + 2B + C = 0 \Rightarrow 3A + 2B + C = -13 \\ (2, 4): \quad 2^2 + 4^2 + 2A + 4B + C = 0 \Rightarrow 2A + 4B + C = -20 \\ (-1, 1): \quad (-1)^2 + 1^2 - A + B + C = 0 \Rightarrow -A + B + C = -2 \end{array} \right\}$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se obtiene:

$$A = -\frac{5}{3}; \quad B = -\frac{13}{3}; \quad C = \frac{2}{3}$$

Así, la ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}y + \frac{2}{3} = 0$$

Cálculo de los elementos de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro en (a, b) y radio r es

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ donde}$$

$$A = -2a, \quad B = -2b \text{ y } C = a^2 + b^2 - r^2.$$

A partir de estos datos se obtienen los siguientes resultados:

$$a = -\frac{A}{2} \quad b = -\frac{B}{2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - C = \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}$$

Si $\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} < 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y se dirá en tal caso, que se trata de una circunferencia imaginaria.

Ejercicio: elementos de una circunferencia

- Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0.$$

Resolución:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{A}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ b &= -\frac{B}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned} \right\} \text{Centro } (2, -3)$$

$$r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Considérese una circunferencia cualquiera y un punto P del plano. Desde el punto P se trazan dos secantes a la circunferencia, obteniéndose los puntos A, A', B y B' .

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

El valor común $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$ recibe el nombre de *potencia del punto P respecto de la circunferencia dada*.

Demostración:



- Trazando los segmentos $\overline{AB'}$ y $\overline{A'B}$ se obtienen los triángulos PAB' y $PA'B$.

Estos dos triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales: el ángulo \hat{P} es común y $\hat{B} = \hat{B'}$ por ser ángulos inscritos en un mismo arco.

- Aplicando la proporcionalidad de los lados homólogos en los triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Cálculo de la potencia de un punto respecto de una circunferencia

La potencia de un punto P respecto de una circunferencia es igual al cuadrado de la distancia del punto al centro de la circunferencia, d^2 , menos el cuadrado del radio de la circunferencia:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

Demostración:



Sea O el centro de la circunferencia. La recta que une P con O , corta a la circunferencia en A y en B .

Llamando d a la distancia \overline{PO} y r al radio de la circunferencia, se tiene que $\overline{PA} = d - r$ y $\overline{PB} = d + r$.

La potencia es entonces:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

Obsérvese que la potencia, dependiendo de la posición del punto P respecto a la circunferencia, toma los valores:

- Positivo, si P es un punto exterior a la circunferencia ($d > r$)
- Cero, si P es un punto de la circunferencia ($d = r$)
- Negativo, si P es un punto interior a la circunferencia ($d < r$).

Expresión analítica de la potencia de un punto respecto de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$; el primer miembro se obtuvo elevando al cuadrado la distancia de un punto al centro de la circunferencia y restando el cuadrado del radio, es decir, hallando la potencia del punto respecto de la circunferencia.

Así pues, para calcular la potencia de un punto respecto de una circunferencia, basta con sustituir las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación de la circunferencia.

Longitud del segmento tangente desde un punto exterior

Sea C una circunferencia, P un punto exterior a ella, r la recta tangente a C desde P y A el punto de tangencia.

La longitud del segmento \overline{AP} es la raíz cuadrada de la potencia de P respecto a la circunferencia.

Demostración:



Considérese la figura adjunta. El triángulo OPA es rectángulo y las medidas de sus lados son d (distancia de P a O), r (radio de la circunferencia) y t (segmento tangente).

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$r^2 + t^2 = d^2 \Rightarrow t^2 = d^2 - r^2$$


Llamando Pot a la potencia de P respecto de la circunferencia, se tiene que

$$Pot = d^2 - r^2.$$

Así pues:

$$t^2 = d^2 - r^2 = Pot \Rightarrow t = \sqrt{Pot}$$

Eje radical

 Se llama *eje radical de dos circunferencias* al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas.

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la recta que une sus centros.

Cálculo analítico del eje radical de dos circunferencias

Sean dos circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ y $x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$.


Su eje radical es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas. Dichas potencias son:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C \text{ y } x^2 + y^2 + A'x + B'y + C'$$

La ecuación del lugar geométrico es:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C &= x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0 \end{aligned}$$

Centro radical de tres circunferencias

 Se llama *centro radical* de tres circunferencias, cuyos centros no estén alineados, al punto que tiene la misma potencia respecto de las tres.

Como los centros no están alineados, si se consideran dos de los ejes radicales, éstos no serán paralelos y tendrán un único punto de intersección. Dicho punto es el centro radical de las tres circunferencias.

Construcción gráfica del eje radical de dos circunferencias

 Se consideran dos casos:

a) Las circunferencias se cortan en dos puntos. El eje radical es la recta que contiene a los dos puntos de intersección.

b) Las circunferencias no son secantes.

Se dibuja una circunferencia secante a ambas, de forma que su centro no esté alineado con el de éstas.

Se trazan los ejes radicales de esta nueva circunferencia con cada una de las iniciales; éstos se cortan en un punto C , centro radical de las tres circunferencias, que ha de estar en el eje radical buscado.

El eje radical es la recta perpendicular a la recta $O'O$, trazada desde C .

Intersecciones de rectas y circunferencias

Conocidas las ecuaciones de una recta y una circunferencia, calcular sus puntos de intersección consiste en plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

El problema se resuelve de forma análoga si se pretende conocer la intersección de dos circunferencias.

CIRCUNFERENCIA (II)

Ejercicio: intersección de circunferencias y de rectas y circunferencias

- Hallar los puntos de intersección de la recta $x + 2y + 1 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

Resolución:



- Se resuelve el sistema $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y - 1$

$$(-2y - 1)^2 + y^2 + 2(-2y - 1) - 4y - 4 = 0 \Rightarrow 5y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{29}}{5} \rightarrow y_1 = \frac{2 + \sqrt{29}}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{-9 - 2\sqrt{29}}{5}$$
$$\rightarrow y_2 = \frac{2 - \sqrt{29}}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{-9 + 2\sqrt{29}}{5}$$

Hay, pues, dos soluciones:

$$\left(\frac{-9 - 2\sqrt{29}}{5}, \frac{2 + \sqrt{29}}{5} \right) \text{ y } \left(\frac{-9 + 2\sqrt{29}}{5}, \frac{2 - \sqrt{29}}{5} \right)$$

- Hallar los puntos de intersección de dos circunferencias cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ y $x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0$

Resolución:

- Se resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0 \end{cases}$

- Se restan las ecuaciones y se obtiene:

$$-3x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow x = y - 1$$

Ésta es la ecuación de una recta, el eje radical.

- $(y - 1)^2 + y^2 - 2(y - 1) + 4y - 11 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \begin{cases} \rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \rightarrow y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$

Se obtienen, pues, dos puntos, (1, 2) y (-3, -2).

Cálculo de rectas tangentes, por un punto, a una circunferencia

- Si el punto P pertenece a la circunferencia, la recta tangente es la perpendicular al radio por P .
- Si el punto P es exterior a la circunferencia, el proceso consiste en hallar una recta que, conteniendo al punto, diste del centro un valor igual al radio.

Ejercicio: cálculo de la recta tangente a una circunferencia

- Hallar las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$ por los puntos (2, 3), (1, 1) y (5, 5).

Resolución:

- Se comprueba si los puntos pertenecen o no a la circunferencia:

$$(2, 3) \rightarrow 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 18 = 0 \Rightarrow (2, 3) \text{ pertenece a la circunferencia.}$$

$$(1, 1) \rightarrow 1^2 + 1^2 - 2 + 3 - 18 = -15 < 0 \Rightarrow (1, 1) \text{ es interior a la circunferencia.}$$

$$(5, 5) \rightarrow 5^2 + 5^2 - 10 + 15 - 18 = 37 > 0 \Rightarrow (5, 5) \text{ es exterior a la circunferencia.}$$

Según esto, habrá una tangente por (2, 3), ninguna por (1, 1) y dos por (5, 5).

- Tangente por (2, 3):

Se ha de calcular la ecuación de una recta que pase por (2, 3) y sea perpendicular al radio que contiene a este punto.

Centro de la circunferencia: $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$

La recta que contiene al radio pasa por los puntos (2, 3) y $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Su pendiente

es:

$$m = \frac{-\frac{3}{2} - 3}{1 - 2} = \frac{9}{2}$$

La pendiente de la tangente es:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

La ecuación punto- pendiente de la tangente es: $y - 3 = -\frac{2}{9}(x - 2)$

• En el caso del punto (5, 5) hay que hallar las rectas que, conteniendo a éste, su distancia al centro es el radio.

Se calcula el radio: $r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \sqrt{\frac{(-2)^2 + 3^2 - 4 \cdot (-18)}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$

La ecuación de una recta que contenga a (5, 5) es $y - 5 = m(x - 5) \Rightarrow$
 $\Rightarrow mx - y + (5 - 5m) = 0$

La distancia de $(1, -\frac{3}{2})$ a dicha recta es: $d = \frac{\left| m + \frac{3}{2} + 5 - 5m \right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\left| \frac{13}{2} - 4m \right|}{\sqrt{1 + m^2}}$

Dicha distancia ha de ser igual a $\sqrt{\frac{85}{4}}$. Así, ha de ser:

$$\frac{\left| \frac{13}{2} - 4m \right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{85}{4}} \Rightarrow \frac{\left(\frac{13}{2} - 4m \right)^2}{1 + m^2} = \frac{85}{4}$$


$$4 \left(\frac{169}{4} - 52m + 16m^2 \right) = 85 + 85m^2$$

$$169 - 208m + 64m^2 = 85 + 85m^2$$

$$21m^2 + 208m - 84 = 0$$

Sustituyendo cada uno de estos valores en la ecuación $y - 5 = m(x - 5)$ se obtienen las dos tangentes.

ELIPSES

 Se llama *elipse* al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante.

La línea que une los dos focos se llama *eje principal* de la elipse y la mediatriz de los mismos *eje secundario*.


Se llaman *vértices* de la elipse a los puntos donde ésta corta a sus ejes.

El punto medio de los dos focos se llama *centro* de la elipse y la distancia entre ellos se llama *distancia focal*.

Generalmente el eje principal se representa por $2a$ y la distancia focal por $2c$. Los valores a y c se llaman *semieje principal* y *semidistancia focal*, respectivamente.

El valor $e = \frac{c}{a}$, que está comprendido entre 0 y 1, se llama *excentricidad de la elipse*.

Cálculo del eje secundario

 Llamando $2b$ al eje secundario, P al vértice superior, O al centro y F y F' a los focos de la elipse, por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{PF} = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\overline{PF'} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por definición de elipse, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$.

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} &= 2a \Rightarrow 2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{b^2 + c^2} &= a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b &= \sqrt{a^2 - c^2}\end{aligned}$$

A la distancia b se le llama *semieje secundario*.

Radio vector

Las distancias desde un punto de la elipse hasta cada uno de los focos se llaman *radios vectores* correspondientes a dicho punto.

Para simplificar los cálculos, se supondrá inicialmente una elipse cuyo centro es el origen de coordenadas y cuyos focos se encuentran en el eje de abscisas. Así los focos serán $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y los ejes de la elipse son los ejes de coordenadas.

Cálculo de los radios vectores

Dado un punto $P(x, y)$ de una elipse centrada en el origen y con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ se tiene:

$$\overline{PF} = a - ex$$

$$\overline{PF'} = a + ex$$

Demostración:



Si el punto pertenece a la elipse, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \\ \overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{array} \right\} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \frac{4a^2 + 4cx}{4a} = \frac{a^2 + cx}{a} = a + \frac{c}{a} \cdot x = a + ex \end{aligned}$$

Pero $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \overline{PF'} = a + ex$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \\ \overline{PF'} = a + ex \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{PF} = 2a - a - ex = a - ex$$

Ecuación canónica de la elipse

La ecuación de una elipse centrada en el origen y con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración:

Sustituyendo en la fórmula de uno cualquiera de los radios vectores se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex = a - \frac{c}{a}x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + c^2 - 2cx + y^2 &= a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2a\frac{c}{a}x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2}$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices de una elipse referida a sus ejes

Los vértices de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$.

Demostración:



Los vértices son los puntos donde la elipse corta a sus ejes. Se calculan por separado para cada eje:

- Eje principal:

El eje principal es el eje de abscisas, es decir $y = 0$. Para hallar su intersección con la elipse se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$$

Los vértices son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

- Eje secundario:

Se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b$$

Los otros dos vértices son $(0, b)$ y $(0, -b)$

Ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si una elipse tiene sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas y su centro en el punto (x_0, y_0) , los puntos de esta elipse se pueden trasladar mediante el vector $-x_0\vec{u}_1 - y_0\vec{u}_2$ y obtener una elipse centrada en el origen.

Entonces el punto que ha de verificar la ecuación canónica es $(x - x_0, y - y_0)$. Por tanto, su ecuación es:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollando esta ecuación, se obtiene:

$$b^2x^2 - 2bx_0x + b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2ay_0y + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que se puede poner en la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son del mismo signo.}$$

Ecuación de una elipse vertical

Si una elipse tiene su eje principal vertical, su ecuación viene dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$



Los vértices son los puntos $(x_0 \pm b, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm a)$ y los focos son $(x_0, y_0 \pm c)$.

Reducción de la ecuación de una elipse

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, ésta puede transformarse

en otra del tipo $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$,

por el método que se verá en los ejercicios de aplicación. Dicha ecuación se llama *ecuación reducida* de la elipse.

Si el segundo miembro fuese 1, se tendría una elipse centrada en (x_0, y_0) . Los ejes de la elipse son las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$. Los vértices son $(x_0 \pm a, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm b)$.

En otro caso, como una suma de cuadrados es siempre positiva, se tendría que ningún punto la verifica y se habla de una elipse imaginaria.

Ejercicio: ecuación de la elipse

- Reducir la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$. Si se trata de una elipse, hallar su centro, sus focos y sus vértices.

Resolución:



- Se agrupan los términos en x^2 con los términos en x y los términos en y^2 con los términos en y :

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 18y) - 23 = 0$$

- Se saca factor común, en cada paréntesis, el coeficiente del término de segundo grado:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 2y) - 23 = 0$$

- Se opera en cada paréntesis hasta obtener un cuadrado perfecto:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$$

$$y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y + 1)^2 - 1$$

- La ecuación se puede escribir:

$$4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y+1)^2 - 1] - 23 = 0$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

- Se divide entre 36:

$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

- Centro de la elipse: (1, -1)

- **Focos:** Para hallar los focos hay que observar que éstos se hallan en una recta horizontal que contiene al centro y a distancia c del mismo. Basta pues con sumar y restar c a la abscisa del centro.

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Los focos son $F(1 + \sqrt{5}, -1)$ y $F'(1 - \sqrt{5}, -1)$

- Los vértices se obtienen sumando y restando a las coordenadas del centro los semiejes de la elipse:

$(1 \pm 3, -1)$, lo que da los puntos (4, -1) y (-2, -1)
 $(1, -1 \pm 2)$, lo que da los puntos (1, 1) y (1, -3)

, Reducir y, en su caso, hallar los elementos de la cónica de ecuación

$$x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$$

Resolución:

- $(x^2 - 8x) + (3y^2 - 12y) + 32 = 0$

$$\bullet (x^2 - 8x) + 3(y^2 - 4y) + 32 = 0$$

$$\bullet x^2 - 8x = x^2 + 16 - 16 - 8x = (x - 4)^2 - 16$$

$$y^2 - 4y = y^2 + 4 - 4 - 4y = (y - 2)^2 - 4$$

$$\bullet (x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 - 16 - 12 + 32 = 0$$

$$(x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 = -4$$

Como el primer miembro es suma de números positivos y el segundo es un número negativo, la ecuación no tiene solución y se trata de una elipse imaginaria.

f Hallar los elementos de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0$

Resolución:



$$\bullet (25x^2 - 50x) + (16y^2 + 64y) - 311 = 0$$

$$25(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) - 311 = 0$$

$$x^2 - 2x = x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1$$

$$y^2 + 4y = y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 = (y + 2)^2 - 4$$

Sustituyendo, la ecuación es:

$$25(x - 1)^2 - 25 + 16(y + 2)^2 - 64 - 311 = 0$$

$$25(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 = 25 + 64 + 311 = 400$$

$$\frac{25(x - 1)^2}{400} + \frac{16(y + 2)^2}{400} = 1$$

$$\frac{(x - 1)^2}{400/25} + \frac{(y + 2)^2}{400/16} = 1, \text{ es decir } \frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$$

Como el denominador de la segunda fracción es mayor que el de la primera, no puede ser $a^2 = 16$ y $b^2 = 25$, lo cual significa que la elipse tiene su eje principal vertical.

Entonces:


$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4$$

Además será $c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = \sqrt{9} = 3$

- El centro es (1, -2)
 - Los vértices son:
(1 ± 4, -2), o sea (-3, -2) y (5, -2)
(1, -2 ± 5), o sea (1, -7) y (1, 3)
 - Los focos son (1, -2 ± 3), es decir (1, -5) y (1, 1)
-

HIPÉRBOLAS

 Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante (se representa por $2a$).

La recta que une los dos focos se llama *eje real de la hipérbola* y la mediatriz se llama *eje imaginario* de la hipérbola.

El punto donde se cortan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se llama *centro* de la hipérbola.

Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes (se verá que únicamente corta al eje real) se llaman *vértices* de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se llama *distancia focal* a la distancia entre los dos focos y a las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a ambos focos se les llama *radios vectores* del punto.

A diferencia de la elipse, aquí se tiene $2c > 2a$ (por tanto $c > a$) y se puede considerar $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Este valor se llama *semieje imaginario de la hipérbola*.

El cociente $e = \frac{c}{a}$, que es un número mayor que 1, se llama *excentricidad* de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se considerarán en primer lugar las hipérbolas centradas en el origen de coordenadas y con focos en el eje de abscisas.

Cálculo de los radios vectores de un punto

En un punto $P(x, y)$ de una hipérbola con focos en los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los radios vectores son:

$$\overline{PF} = |ex - a| \text{ y } \overline{PF'} = |ex + a|$$

Demostración:



Los radios vectores son:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ y}$$

$$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Por definición de hipérbola, $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ . Elevando al cuadrado:}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Eliminando los términos comunes:

$$2cx = 4a^2 - 2cx + 4a \cdot \overline{PF}$$

Despejando:

$$4a \cdot \overline{PF} = 2cx - 4a^2 + 2cx = 4cx - 4a^2, \text{ luego}$$

$$\overline{PF} = \frac{4cx - 4a^2}{4a} = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{cx}{a} - \frac{a^2}{a} = \frac{cx}{a} - a = ex - a$$

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2a = ex - a + 2a = ex + a$$

Nótese que se ha utilizado que la distancia $\overline{PF'}$ es mayor que \overline{PF} , lo cual sólo es cierto en el semiplano de la derecha. Si se hubiese tomado un punto del semiplano de la izquierda y se hubiese operado, el resultado hubiera sido similar, pero cambiando los signos. Es por eso que en el enunciado se tomó valor absoluto en los segundos miembros.

Ecuación canónica de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola con focos en los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración:

Se toma la expresión de uno de los radios vectores y se opera en ella:

$\overline{PF} = \left| \frac{c}{a}x - a \right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{c}{a}x - a \right)^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2 = x^2 + c^2 + y^2 \Rightarrow c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

Sacando factor común $(c^2 - a^2)$,

$$(c^2 - a^2)x^2 + a^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = 0$$

Pero $c^2 - a^2 = b^2$, luego

$b^2x^2 - a^2b^2 - a^2y^2 = 0$. Dividiendo entre $a^2 \cdot b^2$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En el caso en que la hipérbola tuviese el eje vertical, la ecuación sería:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Vértices de una hipérbola

Los vértices de una hipérbola son los puntos donde ésta corta a sus ejes.

Considerando la hipérbola de ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sus ejes son los ejes de coordenadas, cuyas ecuaciones respectivas son $y = 0$ y $x = 0$.

- Eje real

Su ecuación es $y = 0$.

Sustituyendo en la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Los vértices son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

- Eje imaginario

La ecuación del eje es $x = 0$.

Al sustituir queda:

$$\frac{-y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -y^2 = b^2$$

Esta ecuación no tiene solución, ya que el primer miembro es siempre negativo y el segundo es positivo.

Así pues, la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene únicamente dos vértices, que son los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.

Si se tratara de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, los vértices son los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$.

Asíntotas de una hipérbola

Si en la ecuación de la hipérbola se despeja y , resulta:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Pero, para valores grandes de x , $\sqrt{x^2 - a^2} \approx x$, siempre que a sea un número fijo. En efecto:



$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \\ &= \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \end{aligned}$$

Al hacer x suficientemente grande, el denominador aumenta indefinidamente, mientras que el numerador permanece invariable. Así la diferencia se hace tan pequeña como se quiera al crecer x .

Por tanto, la hipérbola se aproxima indefinidamente a las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Estas rectas se llaman *asíntotas de la hipérbola*.


Cálculo práctico de las asíntotas de una hipérbola

Elevando al cuadrado las dos ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm \frac{b}{a}x$, se tiene:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow a^2y^2 = b^2x^2 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

Por tanto, para calcular las asíntotas, se iguala a cero el primer miembro de la ecuación reducida de la hipérbola y se despeja y .

Hipérbola con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

 Si se tiene una hipérbola con centro en un punto (x_0, y_0) , procediendo como se hizo para la elipse, se tiene que su ecuación es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
, si su eje real es horizontal y en el caso de tener el eje real vertical será

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Los focos serán, si el eje real es horizontal $(x_0 \pm c, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm c)$ si es vertical.

De la misma forma los vértices son

$$(x_0 \pm a, y_0) \text{ ó } (x_0, y_0 \pm a)$$

según que el eje real sea horizontal o vertical, respectivamente.

Para hallar las asíntotas, se sustituye 1 por 0 en el segundo miembro y se extrae la raíz cuadrada.

Reducción de la ecuación de la hipérbola

Sea una ecuación de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ en la que A y B tengan distinto signo. Operando por un procedimiento similar al visto en el caso de la elipse, siempre se puede llegar a uno de los tipos de ecuación de una hipérbola.

Ejercicio: ecuaciones de la hipérbola

- Hallar la ecuación reducida de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Hallar su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

Resolución:



- Se asocian los términos que tengan la misma incógnita y se saca factor común el coeficiente de segundo grado:

$$(4x^2 - 8x) - (9y^2 - 36y) + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

- Se completan cuadrados en los paréntesis:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 = (y - 2)^2 - 4$$

- Se sustituye en la ecuación:

$$4(x-1)^2 - 4 - 9(y-2)^2 + 36 + 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 - 9(y-2)^2 = 4 - 36 - 4 = -36$$

- Se divide entre -36:

$$\frac{4(x-1)^2}{-36} - \frac{9(y-2)^2}{-36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{-36/4} - \frac{(y-2)^2}{-36/9} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{-9} - \frac{(y-2)^2}{-4} = 1 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

- Se trata, pues, de una hipérbola con el eje real vertical, con centro en (1, 2) y sus semiejes son $a = \sqrt{4} = 2$ y $b = \sqrt{9} = 3$

- Los vértices son $(1, 2 \pm 2)$, es decir $(1, 0)$ y $(1, 4)$.

- La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

- Los focos son $(1, 2 + \sqrt{13})$ y $(1, 2 - \sqrt{13})$.

- Asíntotas:

$$\begin{aligned} \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 0 &\Rightarrow (y-2)^2 = \frac{4}{9}(x-1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y-2 = \pm \frac{2}{3}(x-1) \begin{cases} y-2 = \frac{2}{3}(x-1) \\ y-2 = -\frac{2}{3}(x-1) \end{cases} \end{aligned}$$

, Hallar los elementos de la hipérbola $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$

Resolución:

- $(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 12 = 0$

$$x^2 + 2x = x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 = (y-2)^2 - 4$$

$$(x+1)^2 - 1 - (y-2)^2 + 4 - 12 = 0$$

$$(x + 1)^2 - (y - 2) = 1 - 4 + 12 = 9$$


$$\frac{(x + 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

• Se trata de una hipérbola con centro en $(-1, 2)$, eje real horizontal, y semiejes $a = 3$, $b = 3$ (este tipo de hipérbolas que tienen iguales sus semiejes se llaman *hipérbolas equiláteras*).

• Los vértices son los puntos $(-4, 2)$ y $(2, 2)$.

• La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

• Los focos son $(-1 + 3\sqrt{2}, 2)$ y $(-1 - 3\sqrt{2}, 2)$

 • Para hallar las asíntotas se iguala a cero el primer miembro de la ecuación reducida:


$$\frac{(x + 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 0 \Rightarrow \frac{(x + 1)^2}{9} = \frac{(y - 2)^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = (y - 2)^2 \Rightarrow x + 1 = \pm(y - 2)$$

$$x + 1 = y - 2 \Rightarrow y = x + 3$$

$$x + 1 = -y + 2 \Rightarrow y = 1 - x$$

PARÁBOLAS

 Se llama *parábola* al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado *foco*, y de una recta fija llamada *directriz*.

La distancia entre el foco y la directriz de una parábola recibe el nombre de *parámetro de la parábola* (suele denotarse por p).

Dada una parábola, se llama *eje* de la misma la recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz.

Se llama *vértice* de la parábola al punto donde ésta corta a su eje.

Para simplificar la parábola, se supondrá que el vértice es el origen de coordenadas y que el foco se encuentra en el semieje positivo de abscisas.

Ecuación canónica de la parábola

La ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco en el punto $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ es

$$y = 2px$$

Demostración:

Te.

La directriz es una recta vertical d de ecuación $x = -\frac{p}{2}$, o sea $x + \frac{p}{2} = 0$.

Dado un punto $P(x, y)$ del plano, su distancia al foco es $d(F, P) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

La distancia a la directriz es $d(P, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$

La condición para que el punto esté en la parábola es que ambas coincidan:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$-px + y^2 = px \Rightarrow y^2 = 2px$$

Hay otros tres casos elementales de parábolas:

Te.

• Si el eje es horizontal y el foco está en el semieje negativo de abscisas, la ecuación es $y^2 = -2px$.

• Si el eje es vertical y el foco está en el semieje positivo de ordenadas, la ecuación es $x^2 = 2py$.

• Si el eje es vertical y el foco está en el semieje negativo de ordenadas, la ecuación es $x^2 = -2py$.

Parábola con vértice en un punto cualquiera

Si el vértice de una parábola se encuentra en un punto (x_0, y_0) su ecuación será, según los casos:



• Eje horizontal y foco a la derecha: $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

• Eje horizontal y foco a la izquierda: $(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$

• Eje vertical y foco por encima: $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$

• Eje vertical y foco por debajo: $(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$

Reducción de la ecuación de una parábola

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ o del tipo $Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, siempre es posible reducirla a la ecuación de una parábola. Para ello se completa un cuadrado y se manipula adecuadamente el otro miembro.

Ejercicio: ecuaciones de parábolas

• Hallar la ecuación reducida de la parábola $2x^2 + 8x + 3y - 5 = 0$. Hallar su vértice, su foco y su directriz.

• Se ha de transformar esta ecuación en una de la forma:



$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \text{ ó } (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$$

• La ecuación dada tiene un término en x^2 . Habrá que transformarla, pues, en una del tipo $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$

$$\begin{aligned} \bullet 2x^2 + 8x + 3y - 5 = 0 &\Rightarrow 2x^2 + 8x = -3y + 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 4x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$. Se sustituye en la ecuación:

$$(x + 2)^2 - 4 = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \Rightarrow (x + 2)^2 = -\frac{3}{2}y + \frac{13}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} (x+2)^2 &= -\frac{3}{2}\left(y-\frac{13}{3}\right) \\ (x-x_0)^2 &= \pm 2p(y-y_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_0 &= -2 \\ -2p &= -\frac{3}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{4} \\ y_0 &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

- Se trata de una parábola con el eje vertical y el foco por debajo del vértice.

El vértice es el punto $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$.

- Para hallar el foco se le resta la mitad del parámetro a la ordenada del vértice:

$$F\left(-2, \frac{13}{3} - \frac{3}{8}\right) = \left(-2, \frac{95}{24}\right)$$

- Por ser el eje vertical, la directriz es horizontal, y su ordenada se obtiene sumándole la mitad del parámetro a la del vértice:

$$y = \frac{13}{3} + \frac{3}{8} = \frac{113}{24}$$

, Hallar los elementos de la parábola $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

Resolución:



- Se opera como en el caso anterior, teniendo en cuenta que ahora la variable que aparece elevada al cuadrado es y :

$$\begin{aligned} y^2 + 6y &= 4x - 13 \\ y^2 + 6y &= y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2 = (y+3)^2 - 9. \\ (y+3)^2 - 9 &= 4x - 13 \Rightarrow (y+3)^2 = 4x - 4 \\ (y+3)^2 &= 4(x-1) \end{aligned}$$


- Es una parábola con vértice en el punto $(1, -3)$.

• Su parámetro es $p = \frac{4}{2} = 2$, el eje es horizontal y el foco está a la derecha del vértice.

• El foco es $F\left(1 + \frac{p}{2}, -3\right) = (1+1, -3) = (2, -3)$

- La directriz se obtiene restándole la mitad del parámetro a la abscisa del vértice: $x = 1 - 1 = 0$. La directriz es el eje de ordenadas.

Intersecciones de una cónica con una recta

 Para calcular la intersección de una cónica con una recta se ha de resolver un sistema de ecuaciones, que dará lugar a una ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$). Al resolver esta ecuación, se obtienen resultados distintos dependiendo del valor que tome el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):

- Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales; sus dos soluciones son números complejos conjugados), el sistema no tiene solución. La recta no corta a la cónica y se dice que es *exterior* a ella.
- Si el discriminante es nulo ($b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales), la recta corta a la cónica en un solo punto. En este caso se dice que la recta es *tangente* a la cónica.
- Si el discriminante es positivo ($b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas), la recta tiene dos puntos comunes con la cónica. Entonces se dice que la recta es *secante* a la cónica.

Ejercicio: intersección de cónicas y rectas

- Hallar los puntos de intersección de la recta $x + y + 1 = 0$ y la elipse $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$.

Resolución:



- Se resuelve el sistema
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$x = -y - 1$$

$$2(-y - 1)^2 + 3y^2 - 4(-y - 1) + 6y - 9 = 0$$

$$5y^2 + 14y - 3 = 0$$

$$y = \frac{-14 \pm 16}{10} \rightarrow y_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_1 = -\frac{6}{5}$$
$$\rightarrow y_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\text{Puntos de corte: } \left(-\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ y } (2, -3)$$

- Trazar una tangente vertical a la cónica $x^2 - y^2 + 2x + y - 2 = 0$.

Resolución:

- Las rectas verticales son de la forma $x = k$
- Sustituyendo este valor en la ecuación:

$$k^2 - y^2 + 2k + y - 2 = 0,$$

$$-y^2 + y + (k^2 + 2k - 2) = 0$$

- Su discriminante es

$$b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(k^2 + 2k - 2) = 1 + 4k^2 + 8k - 8 = 4k^2 + 8k - 7$$

La condición para que la recta sea tangente es que dicho discriminante sea nulo:



$$4k^2 + 8k - 7 = 0$$

$$k = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 112}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{176}}{8} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{11}}{8} = -1 \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$$

Las tangentes verticales son:

$$x = -1 + \frac{\sqrt{11}}{2} \quad y \quad x = -1 - \frac{\sqrt{11}}{2}$$

f Hallar las rectas tangentes a la curva $y^2 = 4x$ que contengan al punto $(-1, 0)$.

Resolución:



- Cualquier recta que contenga a dicho punto tiene una ecuación de la forma $y = m(x + 1)$, donde m es la pendiente.
- Sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$m^2(x+1)^2 = 4x \Rightarrow m^2x^2 + 2m^2x + m^2 = 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + (2m^2 - 4)x + m^2 = 0$$

- El discriminante es

$$(2m^2 - 4)^2 - 4m^2 \cdot m^2 =$$

$$= 4m^4 - 16m^2 + 16 - 4m^4 = -16m^2 + 16$$

- La recta será tangente si este discriminante es nulo:

$$-16m^2 + 16 = 0 \Rightarrow 16m^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \pm 1$$

- Las tangentes buscadas son:

$$y = x + 1 \text{ e } y = -(x + 1)$$
