# CONJUNTOS 3

## 1. Conjunto acotado

"Diremos que A está acotado en R si existen dos números reales K K2 tales que a sea mayor o igual que K2 y a sea menor o igual que K para todo a perteneciente a A"

## 2. Conjunto acotado en valor absoluto

"Diremos que A subconjunto de R esta acotada en valor absoluto si existe K mayor que 0 tal que /a/ sea menor o igual que K para todo a perteneciente a A"

## 3. Axioma del extremo superior

"Si A es un subconjunto de R y está acotado superiormente entonces posee supremo"

## 4. Axioma del extremo inferior

"Si A es un subconjunto de R y está acotado inferiormente entonces posee ínfimo"

## 5. Sucesión de números reales

"Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de N* en R"

## 6. Sucesión constante

"Una sucesión es constante si todos sus términos son iguales se denota (r) y se escribe (r)=(r,r,r,...,r,...)"

## 7. Determinación de sucesiones

Una sucesión queda determinada cuando podemos calcular cualquier termino de la sucesión, con el termino general.

## 8. Operaciones con sucesiones

### Suma con sucesiones:

Asociativa: Para todo (An) (Bn) (Cn) pertenecientes a S se tiene que [(An) + (Bn)] + (Cn) = (An) + [(Bn) + (Cn)]
Conmutativa: Para todo (An) (Bn) pertenecientes a S se tiene que (An) + (Bn) = (Bn) + (An)
Elemento neutro: (0) = (0,0,0,...,0,...)
Todo elemento de S tiene simétrico que se llama opuesto

### Resta de sucesiones:

Es una consecuencia de que toda sucesión tiene opuesta:
(An) - (Bn) = (An) + (-Bn)

### Producto de sucesiones:

Asociativa: Para todo (An) (Bn) (Cn) pertenecientes a S tenemos que [(An).(Bn)].(Cn) = (An).[(Bn).(Cn)]
Conmutativa: Para todo (An) (Bn) pertenecientes a S tenemos que (An).(Bn) = (Bn).(An)
Elemento neutro: Se llama elemento unidad (1) = (1,1,1,...,1,...)
(S,.) es un semigrupo conmutativo

### Sucesión inversible:

(Bn) es inversible si (Bn) no es igual a 0 para todo n perteneciente a N*
Si el denominador es inversible se puede definir el cociente

## 9. Monotonía de sucesiones

### Sucesiones crecientes:

"La sucesión (An) es creciente si An es menor o igual que An+1 para todo n perteneciente a N*"
Propiedad: "La sucesión An es creciente si An+1-An es menor o igual que 0 para todo n perteneciente a N*"

### Sucesiones decrecientes:

"Decimos que (An) es decreciente si An es mayor que An+1,para todo n perteneciente a N*"
Propiedad: "(An) perteneciente a S es decreciente si A(n+1)-An es menor o igual que 0 para todo n perteneciente a N*"

### Sucesión estrictamente creciente:

"(An) perteneciente a S es estrictamente creciente si An es menor que An+1 para todo n perteneciente a N*"

Propiedad: "(An) perteneciente a S es estrictamente creciente si A(n+1)-An es mayor que 0 para todo n perteneciente a N*"

### Sucesión estrictamente decreciente:

"(An) es estrictamente decreciente si An es mayor que A(n+1) para todo n perteneciente a N*"

Propiedad: "(An) es estrictamente decreciente si A(n+1)-An es menor que 0 para todo n perteneciente a N*"

### Proposición:

"Si An es estrictamente creciente entonces An es creciente pero no el recíproco"

"Si An es estrictamente decreciente entonces An es decreciente pero no el recíproco"

## 10. Sucesiones acotadas superiormente

"An está acotada superiormente en R si existe K perteneciente a R tal que An sea menor o igual que K para todo n perteneciente a N*"

### Supremo:

A la menor de las cotas superiores se la llama supremo de la sucesión

### Máximo:

Si el supremo pertenece a dicha sucesión se llama máximo de la sucesión

## 11. Sucesiones acotadas inferiormente

"An es una sucesión acotada inferiormente en R si existe K2 perteneciente a R tal que K2 sea menor o igual que An para todo n perteneciente a N*

### Ínfimo:

A la mayor de las cotas inferiores se la llama ínfimo de la sucesión

### Mínimo:

Si el mínimo pertenece a dicha sucesión se la llama mínimo de la sucesión

## 12. Sucesiones acotadas

"An perteneciente a S está acotada en R si existe K1 K2 pertenecientes a R tales que K2 es menor o igual que An menor o igual que K1 para todo n perteneciente a N*"

## 13. Sucesiones acotadas en valor absoluto

"An está acotada en valor absoluto en R si existe K mayor que 0 tal que /An/ sea menor o igual que K para todo n perteneciente a N*"

### Proposición:

Si An está acotada en R An estará acotada en valor absoluto en R

## 14. Propiedades de las sucesiones acotadas

- La suma de dos sucesiones acotadas es otra sucesión acotada
- El producto de dos sucesiones acotadas es otra sucesión acotada
- El producto de una sucesión acotada por un número real es otra sucesión acotada

## 15. Convergencia

Llamamos sucesiones convergentes en la recta real a todas aquellas que tienen límite

### Definición 1:

"Se dice que (An) tiene por límite un número real a cuando n tiende a mas infinito si para todo epsido mayor que 0 existe No perteneciente a N* tal que para todo n mayor que No implica que /An-a/ es menor que epsido"

### Definición 2:

"Se dice que An tiene por límite un número real a cuando n tiende a mas infinito si para todo epsido mayor que 0 existe No perteneciente a N* tal que para todo n mayor que No implica que An pertenece al entorno (a,epsido)"

### Definición 3:

"Se dice que An tiene por límite un número real a cuando n tiende a mas infinito si para todo epsido mayor que 0 existe No perteneciente a N* tal que para todo n mayor que No implica que An pertenece a (a-epsido, a+epsido)"

## 16. Propiedades algebraicas (relacionan el límite con las operaciones algebraicas de sucesiones)

### Proposición:

Sean (An)perteneciente a S (Bn) perteneciente a S tales que el límite de An es igual a a perteneciente a R y el límite de Bn es igual a b perteneciente a R y sea landa perteneciente a R se verifica:

- El límite de (An+Bn) = límite de An + límite de Bn = a + b

  El límite de una suma es igual a la suma de sus límites
- El límite de (An-Bn) = límite de An - límite de Bn = a - b

  El límite de una resta es igual a la resta de sus límites
- El límite de (An.Bn) = limite de An . limite de Bn = a . b

  El límite de un producto es igual al producto de sus límites
- El límite de un cociente es igual al cociente de los límites si Bn no es igual a 0 para todo n perteneciente a N*

  si Bn es inversible
- El límite de una sucesión convergente por un número real es igual al número real por el límite de la sucesión
- Si (An) es menor o igual que (Bn) entonces a es menor o igual que b
- Propiedad de sandwich:

  Si (An) es menor o igual que (Bn) menor o igual que (Cn)
  Si limite de (An) es igual al límite de (Bn) igual a L perteneciente a R
  entonces limite de (Cn) es igual a L perteneciente a R

## 17. Sucesiones nulas

A las sucesiones que tienen por límite 0 se las llama sucesiones nulas o infinitesimales

### Propiedades:

- La suma de dos sucesiones nulas es otra sucesión nula
- El producto de dos sucesiones nulas es otra sucesión nula
- El producto de una sucesión nula por una sucesión acotada es una sucesión nula

## 18. Teorema

"Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite"

## 19. Límites en la recta real

| SUCESIÓN | LÍMITE |
|---|---|
| Constante K | K pertenece a R |
| 1/n | 0 |
| 1/n2 | 0 |
| 1/nx x mayor que 0 | 0 |
| c/n c pertenece a R | 0 |
| c/nx | 0 |

## 20. Calculo de un límite de cociente de polinomios Pn/Qn

1. Si el grado de Pn es igual al de Qn

- Se divide al numerador y al denominador entre n de exponente el grado de los polinomios y se simplifica
- Se aplica la propiedad 3 formulada a través de la proposición
- Por último se toma el límite y se simplifica

2.Si el grado de Qn es mayor que el de Pn

- Se divide al numerador y al denominador entre n y de exponente el grado del denominador y se simplifica
- Se aplica la propiedad 3 dada a través de la proposición
- Se toma el límite y se simplifica

3.Si el grado de Pn es mayor que Qn

Noes convergente en R

Número e: 2,718281828...

## 21. límite de potencias de sucesiones

Si el límite de An es mayor que 0

Si el límite de Bn es un número real
Entonces el límite de una potencia de sucesiones es igual que la potencie de los límites

## 22. Sucesiones convergentes a mas infinito en la recta ampliada

"Se dice que una sucesión (An) tiene por límite mas infinito si dado un número K mayor que 0 cualquiera existe un número natural No tal que para todo n mayor que No se verifica que An es mayor que K"

## 23. sucesiones convergentes a menos infinito en la recta ampliada

"Se dice que una sucesión (Bn) tiene por límite menos infinito si existe un número K menor que 0 cualquiera existe un número natural No tal que para todo n mayor que No se verifica que An es menor que K"

## 24. Límite de una suma de sucesiones convergentes en la recta ampliada

| **(An)+(Bn)** | **LIMITES** | | |
|---|---|---|---|
| (Bn) (An) | a | Infinito | -Infinito |
| b | a+b | Infinito | -Infinito |
| Infinito | Infinito | Infinito | ---------------- |
| -Infinito | -Infinito | ---------------- | -Infinito |

## 25. Límite de un producto de sucesiones convergentes en la recta ampliada

| **(An).(Bn)** | **LÍMITES** | | | |
|---|---|---|---|---|
| (Bn) (An) | a | 0 | Infinito | -Infinito |
| b | a.b | 0 | +b Infinito<br>-b -Infinito | +b -Infinito<br>-b Infinito |
| 0 | 0 | 0 | ------------- | ------------- |
| Infinito | +a Infinito<br>-a -Infinito | -------------------------<br>--- | Infinito | -Infinito |
| -Infinito | +a -Infinito<br>-a Infinito | -------------------------<br>--- | -Infinito | Infinito |

## 26. Límite del cociente de dos sucesiones convergentes en la recta ampliada

El siguiente cuadro muestra el valor del límite del cociente An/Bn en función de los límites del dividendo y el divisor:

| **(An):(Bn)** | **LÍMITES** | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bn An | a | 0 | Infinito | -Infinito |
| b | a:b | 0 | +b Infinito<br>-b -Infinito | +b -Infinito<br>-b Infinito |
| 0 | ------------- | ------------- | ------------- | ------------- |
| Infinito | 0 | 0 | ------------- | ------------- |
| -Infinito | 0 | 0 | ------------- | ------------- |

## 27. Tipos de indeterminaciones

| | | |
|---|---|---|
| (-Infinito) + Infinito | (-Infinito) . 0 | (-Infinito):Infinito |
| Infinito + (-Infinito) | a:0 | -Infinito:-Infinito |
| 0 . Infinito | 0:0 | Infinito:0 |
| 0 . (-Infinito) | Infinito:Infinito | -Infinito:0 |
| Infinito . 0 | Infinito:(-Infinito) | 1 elevado a infinito |

## FUNCIONES VARIABLES DE VARIABLE REAL

### 1. Función real de variable real

"Una función real de variable real es una aplicación f de un subconjunto no vacío D de R en R es decir

f:DcR-----R

x-----f(x)=y"

Nota: Para tener una función hay que tener dominio recorrido y ley

Nota: Se llaman funciones reales porque su recorrido es R y de variable real porque el dominio pertenece a R

Nota: x es la antimagen de y por f; x es la invariable

y es la imagen de x por f; y es la variable

Nota: f(x)=y es la ley de la función dada a través de una fórmula matemática y como viene despejada la variable se dice que está escrita de forma explícita y que esta expresión depende de x ya que los valores de y se obtienen dando valores a x

Nota: D es el dominio de la función f y se denota Dom(f)=Df=D

### 2. Funciones elementales

#### 1. Función constante:

f:R-----R

x-----f(x)=c;donde c perteneciente a R se llama constante para todo x perteneciente a R; Df=R Imf:c

Gráfica:

Observación:

- Las gráficas de una función constante son rectas paralelas al eje de las x o abscisas
- Por lo tanto solo se necesita un punto para visualizarlo

#### 2. Función identidad en R:( )

: R-----R

x----- (x)=x; para todo x perteneciente a R; D =R Im =R

Gráfica:

Nota: La gráfica de una función identidad es la bisectriz del primer y tercer cuadrante

## 3. Función lineal

f:R-----R
x-----f(x)= a.x; para todo a perteneciente a R* y para todo x
perteneciente a R Df=R Imf=R

Gráfica de a positiva:

Casos particulares:

- Si a = 1 entonces se obtiene la función identidad en R y su gráfica es la bisectriz de el primer y tercer cuadrante
- Si a = -1 entonces la gráfica será la bisectriz del segundo y cuarto

## 4. Función valor absoluto en R

f:R-----R
x-----f(x)=/x/ si x es positivo = x
si x es 0 = 0
si x es negativo = x

Gráfica:

La gráfica en valor absoluto nunca puede ir por debajo del eje de las x o abscisas

Nota: relación entre la gráfica de la función identidad y la función valor absoluto en R

La gráfica de la función valor absoluto se obtiene a partir de la función identidad subiendo la parte que se encuentra por debajo del eje de las x haciéndolo simétrico a la parte que se encuentra por encima del ejeX

## 5. Función afín

f:R----R
x------f(x)= ax + b; a y b pertenecientes a R* Para todo x
perteneciente a R
Dmf: R Imf: R

Gráfica:

Observación: La gráfica de las funciones afines son gráficas que no pasan por el origen de coordenadas, la constante b indica por que punto corta al eje de las y,por encima o por debajo del eje x

Nota: Relacción entre las gráficas de la función afín y la función lineal: Una función afin siempre tiene asociada una función lineal haciendo b igual a 0

## 6. Función polinómica

f: R-----R
x-----f(x)=
Dmf: R Imf: R

Gráfica:

## 7. Función racional

f: R - { }------R
x ----------------------f(x)=
Dmf: R - { }
Imf: R

Gráfica: Se verá a lo largo del curso

## 8. Función "Signo de x"

Sig: R-----R
x-----f(x)=
Dm(Sig): R
Imf: {-1, 0, 1}

Gráfica

## 9. Función "Parte entera de x"

Ent(x)=[]:R-----R

x-----[x] Se toma la parte entera de x

Dm[]: R  Imf: Z

Gráfica:

Obserbación: es un tipo de función escalonada

## Operacones algebraicas con funciones reales de variable real

### Suma de funcones reales de variable real

Sean f: D1cR--------R        g: D2cR--------R
x--------f(x)          x--------g(x)
funciones reales de variable real:
Si D1 intersecado con D2 es distinto al conjunto vacio entonces se puede definir la suma como:
f+g: D1 intersecado D2cR-------R
x-------(f+g)(x)= f(x)+g(x) para todo
x pereneciente a D1 D2

### Propiedades:

Conmutativa: (f+g)(x)= (g+f)(x)
Asociativa: [f(x)+g(x)]+h(x) = f(x)+ [g(x)+h(x)]
Elemento neutro: Para la suma de funciones es la constante 0
0: R----R
x----0(x)=0 para todo x perteneciente a R
f(x)+0(x)= 0(x)+f(x)= f(x) para todo f(x) perteneciente a F(R,R)
Todo elemento de F(R,R) tiene simétrico que se llama opuesto:
Opuesto de f(x)= -f(x) ya que f(x)+(-f(x))= 0(x)

Por verificar estas 4 propiedades el par constituido por [F(R,R),+] es grupo conmutativo o aveliano

### Diferencia o resta de funciones

Debido a que (F(R,R),+) tiene estructura de grupo aveliano entonces se puede definir la resta de funciones como sumar al minuendo el opuesto del sustraendo
Sean f: D1cR-------R          g: D2cR-------R
x-------f(x)            x-------g(x)
funciones reales de variable real
Si el Dm f intersecado con el Dm de (-g) es distinto del conjunto vacio entonces se puede definir la resta de funciones de la siguiente forma:
f-g: D1 intersecado D2 --------------- R
x --------------- (f-g)(x)= f(x)+ (-g(x))
para todo x perteneciente a D1 D2

### Multiplicación o producto de funciones reales de variable real

Sea f: D1cR--------R       g: D2cR--------R
x--------f(x)          x--------g(x)
funciones reales de variable real
Entonces si D1 intersecado con D2 es distinto del conjunto vacio se puede definir el producto de la siguiente forma:
f.g: D1 intersecado D2cR-------R
x-------f.g(x)= f(x).g(x) para todo x
perteneciente a D1 D2

### Propiedades:

Conmutativa: f(x).g(x)= g(x).f(x) para todo f,g pertenecientes a
F(R,R)
Asociativa: [f(x).g(x)].h(x)= f(x).[g(x).h(x)] para todo f,g,h
pertenecientes a F(R,R)
Elemento neutro: Se llama elemento unidad y es la función constante 1 y se define: u: R-----R
x-----u(x)=1 para todo x
perteneciente a R
f(x).u(x)= u(x).f(x)= f(x) para todo f perteneciente a F(R,R)

Por tanto por verificar el par [F(R,R),.] estas 3 propiedades es un semigrupo conmutativo con elemento unidad

Podemos afirmar que la terna (F(R,R),+,.) por verificar:

1. El par (F(R,R),+) tiene estructura de grupo aveliano
2. El par (F(R,R),.) tiene estructura de semigrpo conmutativo con elemento unidad
3. Por tener la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

f(x).(g(x)+h(x))= (f(x).g(x)) + (f(x).h(x))
es un anillo conmutativo con elemento unidad

## Producto de una función por un número real

Sea f: DcR---------R una función real de variable real
x---------f(x)
Sea  un número real cualquiera
Se define el producto de landa por f y se denota   como la función:   : DcR---------R
x---------(  )(x)=  .f(x) para todo x
perteneciente a D
Dm  =Dm(f)=D

## Propiedades:

Distributiva del producto respecto de los escalares:

Distributiva del producto respecto de las funciones:

Asociatividad de los escalares:

Elemento meutro:

Se dice que la terna (F(D,R),+,.) tiene estructura de espacio vectorial.

## Función recíproca de una dada:

Sea f: DcR-------R una función real de variable real
x-------f(x)
Sea Do ={Todos los puntos del dominio de f donde la función no se anula}cD
Si Do es distinto del conjunto vacio se puede definir la función recíproca de la siguiente forma:
1/f: DocR--------R
x--------(1/f)(x)=1/f(x) para todo x perteneciente a Do
Se verifica que:
(f.1/f)(x)= (1/f.f)(x)= u(x)= función constante igual a 1

## Cociente de dos funciones reales de variable real:

No estará definida en los puntos donde se anule el denominador
Sea f: D1cR---------R          g: D2cR---------R
x---------f(x)          x---------g(x)
2 funciones reales de variable real tales que g(x) es distinto de 0 para todo x perteneciente a Dom(g)= D2

## *Simetría, monotonía y acotación de funciones reales de variable real:*

### Simetria de funciones:

Hay dos tipos de simetría diferente:

1. Simetría con respecto al eje oy: función par
2. Simetría con respecto al origen de coordenadas: función impar

#### Función par:

" Una función real de variable ral es par y su gráfica es simétrica al eje oy si para todo x perteneciente al Dm(f) se verifica:

-x pertenece al dominio de f (se verifica si el Dm(f) es R)

f(-x) sea igual f(x)

**Gráfica:**Su gráfica es simétrica respecto al eje oy

#### Función impar:

Una función real de variable real es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen de cordenadas si para todo x perteneciente al Dm(f) verifica:

-x pertenece a Dm(f)

f(-x) = -f(x)

**Gráfica:**Su gráfica es simétrica respecto  al origen de coordenadas

### Acotación de funciones:

Para este apartado se empleara la teoria de intervalos, acotación de un subcojunto de R y la teoria de funciones ya vista.

#### Función acotada superiormente:

"Se dice que f está acotada superiormente en D si el subconjunto f(D) es una parte acotada superiormente de R es decir si existe K1 prteneciente a R tal que f(x) sea menor o igual que K1 para todo x perteneciente a D"

Nota: K1 y todos los números mayores que este se llaman cotas superiores

#### Función acotada inferiormente:

"Se dice que f está acotada superiormente en D si el subconjunto f(D) es una parte acotada inferiormente de R es decir si existe K2 perteneciente a R tal que f(x) es mayor o igual que K2 para todo x perteneciente a D"

Nota: K2 y todos los números menores que este se llaman cotas inferiores

#### Funciones acotadas:

"Una función está acotada en D si su imagen es un conjunto acotado en R es decir si existen K1 y K2 pertenecientes a R tales que K2 sea menor o igual que f(x) menor o igual que K1 para todo x perteneciente a D"

#### Función acotada en valor absoluto:

"Se dice que f está acotada en valor absoluto en D si existe K perteneciente a R tal que /f(x)/ sea menor que K para todo x perteneciente a D"

Nota: Si f está acotada en D f estará acotada en valor absoluto en D

#### Supremo de una función:

"Si f está acxotada superiormente en D, llamamos supremo a la menor de las cotas superiores. El supremo de f(D) se llama supremo de f en D"

Se denota: M= Supf(x) o M= ext supf(x) o M= Sup{f(x)/x  D}

#### Ínfimo de una función:

"Si f está acotada inferiormente llamamos ínfimo a la mayor de las cotas inferiores. El ínfimo de f(D) se llama infimo de la función f en D"

Se denota: m= Inff(x) o m= ext inff(x) o m= Inf{f(x)/x  D}

#### Máximo de una función:

"Si el supremo pertenece a dicha función se denomina máximo de la función. Se dice que f alcanza un máximo absoluto en un punto Xo si el número f(Xo) es igual al supremo de f es decir si verifica: f(x)es menor o igual que f(Xo) para todo x perteneciente a D"

Se denota: M= Maxf(x) o M= Max{f(x)/x  D}

Nota: Se dice que Xo es un punto máximo absoluto de f en D y el valor de dicho máximo es f(Xo)

Nota: Este máximo es estricto si se cumple que f(x) es menor que f(Xo)
Nota si una función tiene máximo lo puede tomar en varios puntos de su dominio

Gráfica:

## Mínimo de una función:

"Si el mínimo de un función pertenece a dicha función entonces se llama mínimo. Se dice que f alcanza un mínimo absoluto en un punto X1 de D si el número f(X1) es igual al ínfimo de f en D es decir si f(X1) es menor o igual que f(x) para todo x perteneciente a D"

Se denota: m = minf(x) o m = min{f(x)/x  D}

Nota: Se dice que X1 es un punto mínimo absoluto de f en D y el valor de dicho mínimo es f(X1)

Nota: Este mínimo es estricto si f(x) es menor que f(X1)

Nota: Si una función tiene mínimo lo puede tomar en varios puntos de su dominio

## Propiedades de las funciones acotadas:

1. La suma de dos funciones acotadas es otra función acotada
2. El producto de dos funciones acotadas es otra función acotada
3. Si una función está acotada su opuesta también lo estará
4. Si f está acotada para todo  perteneciente a R   f estará también acotada

# Monotonía de funciones

Para este apartado se empleará la teoria de monotonía de sucesiones y el tema de entornos
Puede ser de dos clases:

- **Global** Si se refiere al dominio de la función o a un subconjunto de este
- **Local** Es la monotonía en un punto del dominio. Compara el valor de la función en este punto con los que toma la función en los puntos anteriores y posteriores de un entorno de dicho punto.

## Monotonía global:

## Funcion creciente:

"Se dice que f es monótona creciente en A si solo si para todo X1 X2 perteneciente a A donde X1 sea menor que X2 entonces f(X1) será menor o igual que f(X2)"

"Una función se dice creciente si es monótona creciente en su dominio"

## Función estríctamente creciente:

"Se dice que f es monótona estríctamente creciente en A si solo si para todo X1 X2 pertenecientes a A donde X1 menor que X2 entonces f(X1) será menor que f(X2)"

"Una funcion se dice es estríctamente creciente si es estríctamente creciente en su dominio

## Propiedad que relaciona la función estrictamente creciente con la función creciente:

"Si una función es estrictamente creciente en un subconjunto de su dominio entonces la función tambien será creciente en dicho subconjunto pero no el recíproco"

## Función decreciente:

"Se dice que f es monótona decreciente en A si solo si para todo X1 X2 pertenecientes a A donde X1 es menor que X2 entonces f(X1) será mayor o igual que f(X2)"

"Una función es monótona decreciente si es monótona decreciente en su dominio"

## Función estríctamente decreciente:

"Se dice que f es estríctamente decreciente en A si solo si para todo X1 X2 pertenecientes a A donde X1 es menor que X2 entonces X1 será mayor que X2"

"Una función es estríctamente decreciente si es estríctamente decreciente en D"

## Propiedad que relaciona las funciones estríctamente decrecientes con las funciones decrecientes:

"Si una función es monótona estríctamente decreciente en un subconjunto de su dominio entonces la función será también decreciente en dicho subconjunto pero no el recíproco"

## Propiedades de las funciones monótonas:

1. Si una función es creciente en A y también es decreciente en A entonces la función será la función constante en A.

   La función toma el mismo valor en todo punto de A y su gráfica es una recta paralela al eje x.
2. La composición de dos funciones crecientes es una función creciente.

   La composición de dos funciones decrecientes es una función decreciente.
3. Relaciona la monotonía con las funciones inyectivas.

   Si una función es estrictamente creciente entonces, ésta será inyectiva.

## Monotonía local:

Para este apartado se empleara el tema de entornos e intervalos

Para hablar de monotonía local en un punto tengo que definir un concepto muy importante llamado punto de acumulación de un subconjunto de R

"Sea D un subconjunto de R y un punto Xo perteneciente a R no necesariamente perteneciente a D se dice que Xo es un punto de acumulación en D si para todo entorno del punto Xo hay por lo menos un punto de D distinto de Xo"

Proposición: "Un punto Xo perteneciente a R es de acumulación de D si solo si en todo entorno de Xo existen infinitos puntos de D"

## Monotonía local de una función real de variable real en un punto de su dominio:

Sea f: D-----R función real de variable real Sea Xo pertenciente a R y punto de acumulación de D

## Función monótona creciente en un punto de su dominio

"Se dice que f es monótona creciente en el punto Xo perteneciente a D si solo si existe E(Xo,d) tal que verifique:

- Para todo x perteneciente a (Xo-d,Xo) f(x) sea menor o igual que Xo
- Para todo x perteneciente a (Xo,Xo+d) f(x) sea mayor o igual que Xo"

## Función monótona estrictamente creciente en un punto de su dominio

"Se dice que f es monótona estrictamente creciente en el punto Xo perteneciente a D si solo si existe E(Xo,d) tal que verifique:

- Para todo x perteneciente a (Xo-d,Xo) f(x) sea menor que Xo
- Para todo x perteneciente a (Xo,Xo+d) f(x) sea mayor que Xo"

## Propiedad que relaciona la función estrictamente creciente con la función creciente:

"Si una función es estrictamente creciente en un punto de su dominio entonces la función tambien será creciente en dicho subconjunto pero no el recíproco"

## Función monótona decreciente en un punto de su dominio

"Se dice que f es monótona decreciente en el punto Xo perteneciente a D si solo si existe E(Xo,d) tal que verifique:

- Para todo x perteneciente a (Xo-d,Xo) f(x) sea mayor o igual que Xo
- Para todo x perteneciente a (Xo,Xo+d) f(x) sea menor o igual que Xo"

## Función monótona estrictamente decreciente en un punto de su dominio

"Se dice que f es monótona estrictamente decreciente en el punto Xo perteneciente a D si solo si existe E(Xo,d) tal que verifique:

- Para todo x perteneciente a (Xo-d,Xo) f(x) sea mayor que Xo
- Para todo x perteneciente a (Xo,Xo+d) f(x) sea menor que Xo"

## Propiedad que relaciona las funciones estríctamente decrecientes con las funciones decrecientes:

"Si una función es monótona estríctamente decreciente en un punto de su dominio entonces la función será también decreciente en dicho subconjunto pero no el recíproco"

## Calculo de un límite de cociente de funciones f(x)/g(x)

1. Si el grado de f(x) es igual al de g(x)

- Se divide al numerador y al denominador entre x de exponente el grado de los polinomios y se simplifica
- Se aplica la propiedad 3 formulada a través de la proposición

- Por último se toma el límite y se simplifica

2.Si el grado de g(x) es mayor que el de f(x)
- Se divide al numerador y al denominador entre x y de exponente el grado del denominador y se simplifica
- Se aplica la propiedad 3 dada a través de la proposición
- Se toma el límite y se simplifica

3.Si el grado de f(x) es mayor que g(x)
No es convergente en R

## Límite de una suma de funciones convergentes en la recta ampliada

| **F(x)+G(x)** | **LIMITES** | | |
|---|---|---|---|
| g(x) f(x) | L | Infinito | -Infinito |
| L2 | L+L2 | Infinito | -Infinito |
| Infinito | Infinito | Infinito | ---------------- |
| -Infinito | -Infinito | ---------------- | -Infinito |

## Límite de un producto de sucesiones convergentes en la recta ampliada

| **F(x).G(x)** | **LÍMITES** | | | |
|---|---|---|---|---|
| g(x) g(x) | L | 0 | Infinito | -Infinito |
| L2 | L.L2 | 0 | +L2 Infinito<br>-L2 -Infinito | +L2 -Infinito<br>-L2 Infinito |
| 0 | 0 | 0 | ------------- | ------------- |
| Infinito | +L Infinito<br>-L -Infinito | -----------------------<br>--- | Infinito | -Infinito |
| -Infinito | +L -Infinito<br>-L Infinito | -----------------------<br>--- | -Infinito | Infinito |

## Límite del cociente de dos sucesiones convergentes en la recta ampliada

El siguiente cuadro muestra el valor del límite del cociente An/Bn en función de los límites del dividendo y el divisor:

| **F(x):G(x)** | **LÍMITES** | | | |
|---|---|---|---|---|
| f(x) g(x) | L | 0 | Infinito | -Infinito |
| L2 | L:L2 | 0 | +L2 Infinito<br>-L2 -Infinito | +L2 -Infinito<br>-L2 Infinito |
| 0 | ------------- | ------------- | ------------- | ------------- |
| Infinito | 0 | 0 | ------------- | ------------- |
| -Infinito | 0 | 0 | ------------- | ------------- |

## Tipos de indeterminaciones

| | | |
|---|---|---|
| (-Infinito) + Infinito | (-Infinito) . 0 | (-Infinito):Infinito |
| Infinito + (-Infinito) | L:0 | -Infinito:-Infinito |
| 0 . Infinito | 0:0 | Infinito:0 |
| 0 . (-Infinito) | Infinito:Infinito | -Infinito:0 |
| Infinito . 0 | Infinito:(-Infinito) | 1 elevado a infinito |

## LIMITES DE FUNCIONES REALES

### Punto de acumulación:

Un número Xo perteneciente a R se llama punto de acumulación del conjunto D subconjunto de R si todo intervalo abierto (Xo-d,Xo+d) de centro Xo contiene algún punto x diferente a Xo

### Limite de una función real:

Se dice que L perteneciente a R es el limite funcional de f en el punto Xo si para cualquier Epsido > 0 existe d>0 tal que si x pertenece a D y 0</X-Xo/<d entonces /f(x)-L/<Epsido

**Propiedades:**

1. Unicidad de limite
2. Si f(x) es convergente en Xo entonces f(x) está acotada en Xo
3. Si una función toma infinitos valores + y - en el entorno de Xo y es convergente a Xo su limite es 0

### Limites laterales:

Si Xo es un punto de acumulación de (Xo,+inf)(-inf,Xo) se dice que L es el límite por la derecha ,izquierda de f en el punto Xo si para todo epsido>0 existe d>0 tal que si x pertenece a D y x pertenece a (Xo,+inf)(-inf,Xo) entonces /f(x)-L/<Epsido

### Asintota

Si un punto viaja a través de una curva y una de sus coordenadas tiende a -inf mientras que la distancia entre este punto y una recta tiende a 0 entonces esta recta recibe el nombre de asintota

### Asíntota vertical

Si lim_f(x)=+inf o -inf o lim f(x)= +inf o -inf entonces la recta x=Xo es un asintota vertical de f(x)

### Asintota horizontal

Si lim f(x)=b entonces la recta y=b es un asíntota horizontal de f(x) por la derecha y análogamente por la izquierda con -inf

### Asintota oblicua

Si lim f(x)=inf per lim f(x)/x=a y lim (f(x)-ax)=b la recta y=ax+b es un asintota oblicua de f(x) por la derecha análogamente por la izquierda con -inf

## CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

### Continuidad de una función en un punto

1. f es continua en Xo si solo si Existe f(Xo)
   Existe lim f(x)
   Lim f(x)= f(Xo)
2. f es continua en Xo si solo si Lim f(x)= f(Xo)
3. f es continua en Xo si solo si Para todo Epsido>0 existe d(Xo,Eps)>0 tal que para todo x perteneciente a D y /x-Xo/<d entonces /f(x)-f(Xo)/<Eps

### Propiedades algebraicas

1. f+g(x) es continua en Xo
2. f.g(x) es continua en Xo
3. f:g(x) es continua en Xo

### Discontinuidades

Si Xo es un punto del dominio de definición de la función f en la cual esta no es continua decimos que f(x) es discontinua en Xo o que f tiene una discontinuidad en Xo

**Clasificación:**

1. Discontinuidad esencial: Si no existe lim f(x) o no existe lim f(x)
2. Discontinuidad de salto: Si existe lim f(x)=f(Xo) y existe lim f(x)=f(Xo) pero f(Xo)es distinto de f(Xo)
3. Discontinuidad evitable: Si existe lim f(x)=f(Xo)y existe lim f(x)=f(Xo)y f(Xo)=f(Xo)pero f(Xo) es distinto a f(Xo)

Forma de evitarla

Definiendo f(x) para todo x perteneciente a D distinto de Xo
    lim f(x) si x=Xo

# LOGARITMOS

## Logaritmo de los números reales positivos

El logaritmo de un número y>0 en una base dada es el número x a que debe elevarse a para obtener y

**Propiedades algebraicas**

1. Log(u.v)= Log u + Log v
2. Log(u/v)= Log u - Log v
3. Log(u )= x. Log u
4. Log  x = Log x = 1/n. Log x

**Propiedades**

1. Log a = 1
2. Log 1 = 0
3. Log a = x
4. a. Log x = x

# DERIVABILIDAD

## Derivabilidad en un punto

1. Se dice que f es derivable en el punto Xo si existe y es finito el lim f(x)-f(Xo)/x-Xo
2. Se dice que f es derivable en el punto Xo si existe y es finito el
lim f(Xo-h)-f(Xo)/h

## Derivada de una función

La derivada de la función f(x) en el punto Xo es el valor que tiene el lim f(x)-f(Xo)/x-Xo que es un número real

## Derivadas laterales

Derivada lateral por la izquierda en un punto Xo

Derivada lateral por la derecha en un punto Xo

# FORMULAS DE DERIVACION

**Función constante:**
Es continua en todo R luego el dominio de continuidad es todo R
El límite de la función constante es dicha constante c
Dominio de derivabilidad: R
Función derivada:

Fórmula de derivación:

**Función identidad:**
Es continua en todo R luego el dominio de continuidad es todo R
El limite de la función identidad cuando x tiende a Xo es Xo
Dominio de derivabilidad: R
Función derivada:

Fórmula de derivación:

**Función polinómica:**
Es continua en todo R luego el dominio de continuidad es todo R
El limite de la función polinómica cuando x tiende a Xo es f(Xo)
Dominio de derivabilidad: R
Función derivada:

Fórmula de derivación:

**Función racional:**
Es continua en todo R- en los ceros de Q(x) luego el dominio de continuidad es todo R- los ceros de Q(x)
Dominio de derivabilidad: R- los ceros de Q(x)
Función derivada:

Fórmula de derivación:

**Función lineal:**
Es continua en todo R luego el dominio de continuidad es todo R
Dominio de derivabilidad: R
Función derivada:

Fórmula de derivación:

**Función afín:**
Es continua en todo R luego el dominio de continuidad es todo R
Dominio de derivabilidad: R
Función derivada:

Fórmula de derivación: