

INTRO. CONSTRUC. DE CURVAS

Una función, por sí misma, no ofrece la información necesaria para dibujar su gráfica con un mínimo de exactitud.

La derivada va a ser la herramienta más potente a la hora de dar forma a la representación gráfica de una función. Ella determinará con toda fidelidad el crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión; conceptos que serán definidos en el desarrollo del tema.


Ante una función cualquiera $f(x)$ puede averiguarse fácilmente, con un mínimo análisis, cuál es su dominio de definición (dónde está y dónde no está definida). Este conocimiento obliga, al representar la función en un sistema de ejes cartesianos, a centrar la atención en los puntos del eje de abscisas donde está definida.

El primer matemático del que se tenga constancia que representó gráficamente una función fue un profesor de la Universidad de París, Nicole Oresme (1323-1382), quien mediante un par de rectas perpendiculares dibujó la gráfica de un movimiento uniformemente acelerado, de forma similar a como se hace en nuestros días. No obstante, la mayor aportación que hizo Oresme a la matemática fue la definición de potencias de exponentes fraccionarios y operaciones con ellas.


La representación gráfica de una función aporta mucha más información que la simple definición de la función, por cuanto nos permite visualizar la variación de la variable dependiente, y , con respecto a la variable independiente, x ; es decir, cuándo la función es creciente o decreciente, cuándo se alcanza el punto máximo o el mínimo, entre otros muchos aspectos.

Aunque la palabra *curva* puede tener varios significados, en lo que sigue, se debe entender como la representación gráfica de una función en un sistema de ejes cartesianos, es decir, la representación de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$. Como, en general, este conjunto de puntos es infinito, no se podrán señalar uno a uno, por lo que habrá que conformarse con una aproximación que, por otro lado, será tanto mejor cuanto más información se tenga del comportamiento de la curva, que podrá ser muy variable. Por esto es necesario distinguir y analizar los distintos casos que se pueden presentar.

FUNC. CREC. Y DECREC. DE INTER.


 • Una función es *creciente en un intervalo* $[a, b]$ si al tomar dos puntos cualesquiera del mismo, x_1 y x_2 , con la condición $x_1 \leq x_2$, se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Se dice *estrictamente creciente* si de $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) < f(x_2)$.

 • Una función es *decreciente en un intervalo* $[a, b]$ si para cualesquiera puntos del intervalo, x_1 y x_2 , que cumplan $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.


Siempre que de $x_1 < x_2$ se deduzca $f(x_1) > f(x_2)$, la función se dice *estrictamente decreciente*.

FUNC. CREC. Y DECREC. EN PUNTO

 • Una *función es creciente en un punto a* si existe un intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, cumpliéndose:

$f(x) \leq f(a)$ si x pertenece a $(a - \varepsilon, a)$ y

$f(x) \geq f(a)$ si x pertenece a $(a, a + \varepsilon)$.

 • Análogamente, una *función es decreciente en un punto a* si existe un intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ en el que

$f(x) \geq f(a)$ si x pertenece a $(a - \varepsilon, a)$ y

$f(x) \leq f(a)$ si x pertenece a $(a, a + \varepsilon)$.

La definición de función estrictamente creciente o decreciente en un punto se obtiene sin más que sustituir el símbolo \leq por $<$ y el \geq por el $>$.

Es preciso diferenciar el significado de función creciente o decreciente en un intervalo del de función creciente o decreciente en un punto.

Ejemplo: estudio del crecimiento y decrecimiento de una función

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^2$ en los puntos $\frac{1}{2}$, -1 y 0 .

Resolución:



- La función $y = x^2$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$ puesto que si $x_1 < x_2$, $x_1^2 < x_2^2$.

Es estrictamente creciente en $x = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ ya que en este intervalo (al ser números negativos), si $x_3 < x_4 \Rightarrow x_3^2 > x_4^2$ (por ejemplo, $-7 < -3$ y $(-7)^2 > (-3)^2$). Es estrictamente decreciente en $x = 0$.

- Nótese cómo en $x = 0$ la función no es creciente ni decreciente. A la izquierda de este punto es decreciente y a la derecha es creciente.

Como pone de manifiesto este ejemplo, toda función creciente en un intervalo (respectivamente decreciente) es creciente (respectivamente decreciente) en todo punto de ese intervalo.


Recíprocamente, toda función estrictamente creciente (respectivamente decreciente) en todo punto de un intervalo, es creciente (respectivamente decreciente) en todo el intervalo.

MÁXIM. Y MÍNIM. DE UNA FUNCIÓN

Dada una función $f(x)$, se dice que tiene un *máximo relativo* en un punto de *abscisa* a , si existe un intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ en el que $f(x) < f(a)$ para cualquier punto x perteneciente a $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. El máximo es entonces el punto $(a, f(a))$ de la curva.

La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en un punto b si hay un intervalo $(b - \delta, b + \delta)$ en el que $f(x) > f(b)$ para cualquier punto x perteneciente a $(b - \delta, b + \delta)$. El mínimo es entonces el punto $(b, f(b))$ de la curva.

A los máximos y mínimos de una función se les da el nombre común de *extremos relativos* o simplemente *extremos*.

 Es claro, como se ve en la gráfica, que una función puede tener más de un máximo y más de un mínimo.


Consecuencias

1. La tangente a una curva en cualquiera de sus extremos es paralela al eje de abscisas, por lo que el ángulo que forma con dicho eje es de cero grados.

En consecuencia, la pendiente de dichas tangentes ($tg 0^\circ$) es cero. Como estas pendientes coinciden con las derivadas de la función en los puntos de abscisa correspondientes, se deduce inmediatamente que $f'(a) = 0$ y $f'(b) = 0$, si en a y b existe un máximo o un mínimo.

2. De lo anterior se desprende que los extremos relativos de una función deben buscarse entre los valores que hacen cierta la igualdad $f'(x) = 0$.

No obstante, aún no se dispone de ningún método que permita determinar si las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ son máximos, mínimos, o ni lo uno ni lo otro.

 Todas estas consideraciones tienen sentido si la función es derivable en los extremos relativos, condición que, como ya se sabe y muestra la figura, no siempre se da.

Así, en el punto $(a, f(a))$ hay un mínimo relativo pero la función no es derivable en el punto a ; por tanto, no existe $f'(a)$.

Ejercicio: determinación de posibles puntos extremos

- ¿Qué puntos de la función $f(x) = 2x^2 - 3$ pueden ser extremos relativos?

Resolución:

Los posibles extremos relativos de la función $f(x) = 2x^2 - 3$ se obtienen al resolver la ecuación

$$f'(x) = 2 \cdot 2x = 0, \text{ de donde necesariamente } x = 0$$

Aún así no se puede asegurar si en este punto hay máximo, mínimo o ni lo uno ni lo otro. Desde luego, si hay extremo relativo éste se encuentra en el punto de abscisa $x = 0$ que corresponde al punto $(0, -3)$.

PROP. DE LAS FUNC. DERIVABLES

Primera propiedad

Si una función $f(x)$ tiene derivada positiva en un punto a , la función es estrictamente creciente en ese punto.

Demostración:



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0, \text{ para } h \text{ suficientemente pequeño o}$$

Si $h > 0$, forzosamente $f(a+h) - f(a) > 0$, o lo que es lo mismo, $f(a+h) > f(a)$.

Si $h < 0$, $f(a+h) - f(a) < 0$, de donde $f(a+h) < f(a)$, lo que prueba que la función es creciente en el punto a .

Segunda propiedad

Si una función $f(x)$ tiene derivada negativa en un punto a , la función es estrictamente decreciente en ese punto.

Demostración:



Se razona de forma análoga al caso anterior.

Para un h suficientemente pequeño, el cociente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es negativo, con

lo que $f(a+h) - f(a) < 0$ para $h > 0 \rightarrow f(a+h) < f(a)$ para $h > 0$, y

$f(a+h) - f(a) > 0$ para $h < 0 \rightarrow f(a+h) > f(a)$ para $h < 0$

Todo esto prueba que la función $f(x)$ es estrictamente decreciente en a .

Ejercicio: estudio del crecimiento y decrecimiento de una función

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2$ en los puntos de abscisa 1 y 2.

Resolución:

- Se deriva $f(x)$: $f'(x) = 6x^2 - 10x$
- $f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 = 6 - 10 = -4 < 0$.

La función es estrictamente decreciente en $x = 1$.

- $f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 24 - 20 = 4 > 0$

La función es estrictamente creciente en $x = 2$.

Tercera propiedad

Si una función tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto a y existe $f'(a)$, necesariamente $f'(a) = 0$.

Demostración:

- Si $f'(a)$ fuese positivo, la función sería estrictamente creciente en a , cosa que no puede ocurrir al haber en a un extremo.
- Si $f'(a)$ fuese negativo, la función sería estrictamente decreciente en a , lo que contradice el hecho de existir a en un extremo.
- En consecuencia, si existe $f'(a)$, ha de ser $f'(a) = 0$.

Así pues, queda confirmado que los extremos de una función hay que buscarlos entre los valores que resuelvan la ecuación $f'(x) = 0$. Sin embargo, una función puede tener derivada nula en un punto y no poseer extremo relativo en ese punto.

Ejercicio: estudio de los puntos en los que la derivada de una función se anula

- ¿En qué puntos se anula la derivada de la función $f(x) = x^3$? ¿Son extremos relativos?

Resolución:



$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

En el punto (0,0) no hay extremo relativo como fácilmente se observa en la gráfica.

Cuarta propiedad

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b) con derivada cero en todos los puntos de $[a,b]$, entonces la función es constante.

Sin que esto pueda considerarse como una demostración rigurosa, obsérvese que si la derivada es cero en todos los puntos, esto significa que en cada punto de la curva, la tangente es paralela al eje X, lo cual quiere decir que la gráfica de la función es una recta paralela al eje de abscisas.
La función es de la forma $f(x) = C = \text{cte}$.

Quinta propiedad

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y tienen la misma derivada en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) , las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante.

Demostración:

- Se considera la nueva función $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Derivando, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, puesto que $f'(x) = g'(x)$.
- Por la propiedad anterior, $h(x) = f(x) - g(x) = C = \text{cte}$.

DERIV. SUCESIVAS DE UNA FUNC.

Hasta ahora se sabe que los candidatos a extremos proceden de las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Falta por determinar cuándo una de estas soluciones es un máximo, un mínimo o no es un extremo. Previamente se necesita dominar un nuevo concepto.

Definición:

Dada una función $f(x)$, se sabe calcular su derivada $f'(x)$ (derivada primera).

Si ahora se vuelve a derivar $f'(x)$, se obtiene la *derivada segunda* y se simboliza por $f''(x)$. Si se vuelve a derivar esta función se tiene la *derivada tercera*, $f'''(x)$, y así sucesivamente.

En general, la *derivada de orden n* de una función $f(x)$, se llama derivada n -ésima y se simboliza por $f^{(n)}(x)$.

Ejercicio: cálculo de derivadas sucesivas

- Calcular la derivada tercera de la función $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5$.

Resolución:




- $f(x) = 18x^2 - 14x$
- $f''(x) = 36x - 14$
- $f'''(x) = 36$

DET. MÁXIM. DE UNA FUNCIÓN

De las definiciones y resultados obtenidos se derivan tres métodos para la determinación de los extremos de una función.

1. Análisis de la función a derecha e izquierda de cada posible extremo

Si a es un punto en el que $f'(a) = 0$, se toma un número h suficientemente pequeño y se calculan los valores $f(a + h)$ y $f(a - h)$:

-  a) Si los dos son menores que $f(a)$, hay un máximo en a .
-  b) Si ambos son mayores que $f(a)$, en a hay un mínimo.
-  c) Si uno de ellos es mayor que $f(a)$ y el otro menor, no hay extremo.

Ejercicio: determinación de los extremos de una función

- Encontrar los extremos de la función $y = x^2$.

Resolución:

- Puesto que la ecuación $y' = 2x = 0$ tiene como solución $x = 0$, de haber algún extremo éste se encuentra en el punto $(0,0)$.

- Tomando por ejemplo, $h = \frac{1}{8}$

$$f\left(0 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64} > f(0) = 0, \text{ y } f\left(0 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64} > f(0) = 0$$

Por tanto en el punto $(0,0)$ hay un mínimo.

- , Hallar, si existen, los extremos de la función $y = x^3$.

Resolución:


- La solución de $y' = 3x^2 = 0$ es $x = 0$

- Tomando $h = \frac{1}{4}$

$$f\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} > f(0) = 0 \text{ y } f\left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64} < f(0) = 0$$

Se concluye que la función $y = f(x) = x^3$ no tiene extremos relativos.

2. Análisis de la derivada a derecha e izquierda del posible extremo

 Si a es un punto en el que $f'(a) = 0$, eligiendo un número h próximo a cero, puede ocurrir:

- a) Si $f'(a - h)$ es negativo y $f'(a + h)$ es positivo, en a hay un mínimo.

Obsérvese que a la izquierda de un mínimo las tangentes a la curva tienen pendiente negativa y a la derecha tienen pendiente positiva.

b) Si $f'(a - h)$ es positivo y $f'(a + h)$ es negativo, en a hay un máximo.

La explicación de este criterio se obtiene mediante un razonamiento análogo al anterior.

c) Si $f'(a - h)$ y $f'(a + h)$ tienen el mismo signo, positivo o negativo, no hay extremo en el punto a .

Ejercicio: determinación de extremos

① Determinar los extremos de la función $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Resolución:

• Por la fórmula de la derivada de un cociente,

$$y' = \frac{0 \cdot (1+x^2) - 1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

Puesto que una fracción es cero cuando su numerador es cero,

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0$$

• Para un h suficientemente pequeño (ya sin especificar como en el caso anterior):

$$f'(0-h) = f'(-h) = \frac{-2(-h)}{(1+h^2)^2} > 0,$$

(el numerador y el denominador son positivos).

$$f'(0+h) = f'(h) = \frac{-2h}{(1+h^2)^2} < 0,$$

(numerador y denominador tienen signos distintos).

• Se observa que la derivada pasa, en un entorno del punto de abscisa 0, de ser positiva a ser negativa. Se deduce, pues, que en este punto hay un máximo relativo.

Como para $x = 0$, $y = 1$, el máximo de esta función está en el punto (0,1).

3. Análisis de la derivada segunda

Si $f(x)$ es una función derivable en un entorno de a , $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ y $f'(a) = 0$,

a) Si $f''(a) > 0$, la función tiene un mínimo en a .

b) Si $f''(a) < 0$, la función tiene un máximo en a .

Demostración:

a) Por ser $f''(a) > 0$, la función $f(x)$ es estrictamente creciente en a (primera propiedad de funciones derivables).

Por definición, $f'(x) < f'(a) = 0$ para cualquier x de $(a - \varepsilon, a)$, y
 $f'(x) > f'(a) = 0$ para cualquier x de $(a, a + \varepsilon)$

De $f''(x) < 0$ en $(a - \varepsilon, a)$ se deduce (por la segunda propiedad de funciones derivables) que la función $f(x)$ es estrictamente decreciente en cada punto de $(a - \varepsilon, a)$, es decir, es estrictamente decreciente en $(a - \varepsilon, a)$. Por tanto,

$$f(x) > f(a) \text{ para todo } x \text{ de } (a - \varepsilon, a)$$

Análogamente, y por la misma razón, de $f'(x) > 0$ en $(a, a + \varepsilon)$ se infiere que la función $f(x)$ es estrictamente creciente en $(a, a + \varepsilon)$. En consecuencia,

$$f(x) > f(a) \text{ para todo } x \text{ de } (a, a + \varepsilon).$$

Si $f(x) > f(a)$ en $(a - \varepsilon, a)$ y $f(x) > f(a)$ en $(a, a + \varepsilon)$ } $\Rightarrow f(x) > f(a)$ para todo x de $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,

lo que quiere decir que en a hay un mínimo relativo.

b) Se probaría análogamente al caso a).

Ejercicio: cálculo de máximos y mínimos

• Determinar los máximos y mínimos de la función $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Resolución:

• Se calcula y' y se iguala a cero, $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0$

• La ecuación $6x^2 + 6x - 12 = 0$ tiene por raíces 1 y -2.

• Se calcula la segunda derivada $f''(x) = 12x + 6$

Para $x = 1$, $f''(1) = 12 + 6 = 18 > 0$. En $x = 1$, (1,-7), hay un mínimo.

Para $x = -2$, $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$. En $x = -2$, (-2,20), hay un máximo.

, Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Resolución:

• Para cualquier valor de x , el denominador $1 + x^2 > 0$, es decir, no se anula. Por tanto, la función está definida para todo número real x . Dicho de otra forma, su dominio de definición es toda la recta real.

• La función es siempre positiva cualquiera que sea el valor de x , por tanto su gráfica quedará por encima del eje de abscisas.

• Posee, según se ha estudiado ya, un máximo en el punto $(0,1)$.

• Puesto que $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = f(-2) = \frac{1}{5}$; y, en general,

$$f(x) = f(-x),$$

basta estudiar la gráfica en el primer cuadrante, dibujar la curva y completar su trazado en el segundo cuadrante por simetría con respecto al primero.


• Cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{1+x^2} \rightarrow 0$ por lo que en el infinito la curva tiende a unirse al eje de abscisas (aunque nunca la toca).

• Si $x > 0$ $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$, por lo que la función es decreciente en $[0, +\infty)$.


Si $x < 0$, $y' > 0$ y la función es creciente en $(-\infty, 0]$.

 Con todos estos datos el trazado aproximado de la curva es:


La gráfica de la función $y = \frac{1}{1+x^2}$, con los datos de que se disponía, muy bien podría haberse dibujado de cualquiera de estas formas.

 Esto pone de manifiesto que se necesita más información para representar con mayor exactitud una curva.

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD


 • Una función $f(x)$ no lineal se dice que es *convexa* en un intervalo si $f''(x) \geq 0$ en todo punto de dicho intervalo. Por la primera propiedad de las funciones derivables, esto significa que $f'(x)$ es una función creciente en ese intervalo. Basta recordar el significado de la derivada para concluir que las pendientes de las tangentes a la curva en los puntos de abscisa del citado intervalo aumentan según se avanza de izquierda a derecha, por el eje de abscisas.

Es claro que en una función convexa las tangentes a la curva quedan por debajo de ésta.

 • Una función $f(x)$ se dice que es *cóncava* en un intervalo si $f''(x) \leq 0$ en todo punto de él. Por la segunda propiedad de las funciones derivables, es tanto como decir que la

función $f'(x)$ es decreciente, o lo que es equivalente, las pendientes de las tangentes a la curva disminuyen al recorrer de izquierda a derecha los puntos de abscisa del intervalo considerado.

En una tal función las tangentes a la curva quedan por encima de ésta.

 • La gráfica de una función $f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en un punto de abscisa a , si en el punto $(a, f(a))$ la curva pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.


¿Cómo se encuentran los puntos de inflexión?

Puesto que una función es convexa cuando $f''(x) \geq 0$ y cóncava si $f''(x) \leq 0$, y el punto de inflexión separa una concavidad de una convexidad, en él la segunda derivada, si existe, necesariamente ha de ser nula. Por tanto, si en a hay un punto de inflexión, $f''(a) = 0$.

Sin embargo, hay puntos en los que la derivada segunda es cero sin que existan puntos de inflexión en ellos.

Determinación de puntos de inflexión

1.º Los posibles puntos de inflexión de una función $f(x)$ deben buscarse entre las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$.

 2.º Si a es una de estas soluciones, hay que comprobar que separa un tramo de curva cóncavo de otro convexo; para ello se toma un número h suficientemente pequeño y se comprueba que $f''(a + h)$ y $f''(a - h)$ tienen signos distintos, todo lo cual indica que a un lado de a la curva es convexa y al otro cóncava.

3.º Por el contrario, si $f''(a + h)$ y $f''(a - h)$ tienen el mismo signo, la curva es totalmente cóncava o totalmente convexa en un entorno de a y prueba la no existencia de puntos de inflexión.

La tangente a una curva en un punto de inflexión corta a ésta, ya que en la parte cóncava la tangente queda por encima, mientras que en la convexa queda por debajo de la curva.

Ejemplo: cálculo de puntos de inflexión

① Encontrar, si los tiene, los puntos de inflexión de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$

Resolución:

• Ya se calculó $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

• $f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$

- Igualando a cero la segunda derivada y teniendo en cuenta que una fracción es cero cuando su numerador es cero,

$$2(3x^2 - 1) = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

- Puesto que el denominador es positivo, $f''(x)$ es positivo cuando el numerador sea positivo, y negativo si el numerador es negativo.

Sustituyendo x por $\sqrt{\frac{1}{3}} + h$,

$$2 \left[3 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} + h \right)^2 - 1 \right] = 2 \left[3 \left(\frac{1}{3} + \frac{2h}{\sqrt{3}} + h^2 \right) - 1 \right] = 2 \left(\frac{6h}{\sqrt{3}} + 3h^2 \right) > 0$$

Por tanto, $f'' \left(\sqrt{\frac{1}{3}} + h \right) > 0$ y la función es convexa a la derecha de $\sqrt{\frac{1}{3}}$

- Análogamente, sustituyendo x por $\sqrt{\frac{1}{3}} - h$,

$$2 \left[3 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - h \right)^2 - 1 \right] = 2 \left[3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2h}{\sqrt{3}} + h^2 \right) - 1 \right] = 2h(3h - 2\sqrt{3}) < 0$$

pues para $h < 1$, $3h < 3$ y $2\sqrt{3} \cong 3,46$, por lo que $3h - 2\sqrt{3} < 0$

Por consiguiente, $f''(\sqrt{\frac{1}{3}} - h) < 0$ y la función es cóncava a la izquierda de $\sqrt{\frac{1}{3}}$.


- Haciendo un estudio parecido para $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ se comprueba que la función es

convexa a la izquierda de $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ y cóncava a la derecha de $-\sqrt{\frac{1}{3}}$

 Con estos datos se puede dibujar la curva con suficiente precisión.

ASÍNTOTAS

Dado un punto en el plano de coordenadas (x,y) , su distancia al origen de coordenadas viene dado, sin más que aplicar el teorema de Pitágoras, por $\sqrt{x^2 + y^2}$.

 Si x o y o ambos a la vez se hacen muy grandes, el número $\sqrt{x^2 + y^2}$ se hace también muy grande. Dicho en términos más precisos, si x o y o ambos tienden a infinito, $\sqrt{x^2 + y^2}$ tiende a infinito, lo cual indica que la distancia de dicho punto al origen de coordenadas se hace infinito.

Definición:

Una curva tiene como *asíntota* una recta, si la distancia de un punto P de la curva a la recta tiende a cero cuando el punto P se aleja indefinidamente del origen de coordenadas recorriendo la curva. En otros términos, puede decirse que una asíntota es una tangente a la curva en el infinito.

Asíntotas paralelas al eje Y o verticales

Cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ la asíntota viene dada por la ecuación $x = a$.

- *Determinación de asíntotas paralelas al eje Y*

Se determinan igualando el denominador de la función a cero y resolviendo la ecuación.

Si la función no viene expresada mediante una fracción, hay que estudiar cuándo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty.$$

Por ejemplo, en $f(x) = \ln x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \Rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas paralelas al eje X u horizontales

Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a$ (un número), la asíntota viene dada por $y = a$.

Asíntotas generales u oblicuas

Son aquellas asíntotas que no son paralelas a ninguno de los ejes.

Aunque no se justificará el cálculo, la ecuación de una asíntota oblicua se obtiene como sigue:

Si la ecuación de una asíntota oblicua es $y = mx + b$,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$


Si $m = 0$, la asíntota resulta ser una asíntota horizontal.

Ejercicio: cálculo de asíntotas

① Encontrar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ y hacer una representación.

Resolución:

- Se iguala el denominador a cero:
 $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$. $x = 1$ es una asíntota.
- Si $0 < x < 1$, $f(x) < 0$, y, por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 1$, $f(x) > 0$, y, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
- Además $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.


 Por tanto, cuando x es positivo y tiende a $+\infty$ o es negativo y tiende a $-\infty$, la ordenada $y = \frac{x}{x-1}$ se aproxima mucho a 1.

CONSTRUCCIÓN DE CURVAS

El dominio de definición de una función; su crecimiento y decrecimiento; el cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión; el estudio de concavidad y convexidad y el hallazgo de posibles asíntotas, permiten construir con tanta precisión como se desee innumerables curvas.


A los apartados anteriores conviene añadir el estudio de posibles simetrías que, cuando existan, simplificarán notablemente las construcciones de curvas.

Simetrías

 • Una *función* se dice que es *par* si $f(x) = f(-x)$.

Estas funciones son simétricas respecto al eje de ordenadas. Basta, pues, dibujar la curva situada a la derecha de este eje y complementarla a la izquierda por simetría.

Son funciones pares $y = x^2$, $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \cos x$, etc.

 • Una *función* $f(x)$ es *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

Las gráficas de estas funciones tienen al origen de coordenadas por centro de simetría. La más característica de estas funciones es $f(x) = x^3$. En efecto,
 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Pasos a seguir en la construcción de una curva

1. Dominio de definición de la función.
2. Simetrías.
3. Puntos de corte con los ejes.

4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Ejercicio: representación de curvas

① Representar la curva dada por $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

Resolución:

1. Dominio de definición

La función está definida para todo valor de x excepto para $x = 5$, que anula al denominador. En consecuencia, la recta $x = 5$ es una asíntota vertical.

Las raíces de $x^2 - 5x + 4 = 0$ son 1 y 4, por lo que $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.

Así, $y = \frac{(x - 1)(x - 4)}{x - 5}$. Esta fracción es positiva para cualquier $x > 5$.

Es decir, $y > 0$ en $(5, +\infty)$.

a) Si $x > 1$ y $x < 4$, tanto el numerador como el denominador son negativos, por lo que en este intervalo, $(1, 4)$, $y > 0$.

b) Si $x < 1$, el numerador es positivo y el denominador es negativo. Por tanto, $y < 0$ en $(-\infty, 1)$.

c) Si $x > 4$ y $x < 5$, el numerador es positivo y el denominador negativo. En consecuencia, $y < 0$ en $(4, 5)$.

Para $x = 1$ y $x = 4$ el numerador se anula y, en consecuencia, $y = 0$. Así, la curva pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(4, 0)$.

Se pueden delimitar ya las zonas por las que pasa la curva:



2. Simetría

La función no es par ni impar:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 5(-x) + 4}{-x - 5} = \frac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5}$$

$$f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x)$$

3. Puntos de corte de los ejes

Los puntos de la curva que cortan al eje Y tienen abscisa cero, luego imponiendo $x = 0$, y sustituyendo en la expresión de y , $y = -\frac{4}{5}$. La curva pasa por $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.

Análogamente, los puntos de la curva situados sobre el eje X tienen ordenada cero ($y = 0$). En el apartado anterior se obtuvieron los puntos (1,0) y (4,0).

4. Asíntotas

Ya se conoce la asíntota vertical calculada en el primer apartado: $x = 5$.


Puesto que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x}$$

$$\text{Por tanto, } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 5} = 0$$

 En consecuencia, la asíntota oblicua es $y = mx + b = 1 \cdot x + 0 = x \rightarrow y = x$.

5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Derivando la función por la fórmula del cociente, $y' = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2}$

Como las raíces de $x^2 - 10x + 21 = 0$ son 7 y 3, $y' = \frac{(x - 7)(x - 3)}{(x - 5)^2}$

Al ser el denominador de esta fracción positivo, para cualquier valor de x , basta estudiar la variación de los signos en el numerador.

a) Si $x > 7$, $(x - 7)(x - 3) > 0$. En este caso $y' > 0$ y la función es creciente en $(7, +\infty)$.

b) Si $x > 3$ y $x < 7$, $(x - 7)(x - 3) < 0$; entonces $y' < 0$ y la función es decreciente.


c) Si $x < 3$, el numerador es positivo, $y' > 0$ y la función es creciente en $(-\infty, 3)$.

6. Máximos y mínimos

Si $x = 7 - h$, $y' < 0$. Si $x = 7 + h$, $y' > 0$, luego la derivada de la función en el punto 7 pasa de negativa a positiva por lo que en $x = 7$ hay un mínimo.

De la misma forma, si $x = 3 - h$, $y' < 0$; si $x = 3 + h$, $y' > 0$, lo que indica que en $x = 3$ hay un máximo, ya que la derivada en dicho punto pasa de positiva a negativa.

Para $x = 7$, $f(7) = \frac{7^2 - 5 \cdot 7 + 4}{7 - 5} = 9$; el mínimo es (7,9).

 Para $x = 3$, $f(3) = 1$; el máximo es $(3, 1)$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Los posibles puntos de inflexión se obtienen de las soluciones de la ecuación

$$f''(x) = \frac{8}{(x-5)^3} = 0,$$

y una fracción es cero cuando su numerador es cero.

Puesto que el numerador es 8 y no puede valer nunca cero, la anterior ecuación no tiene solución y la curva no tiene puntos de inflexión.

Si $x > 5$, $(x-5)^3$ es positivo y, por consiguiente,

$$f''(x) > 0 \text{ en } (5, +\infty)$$

y la curva es, en este intervalo, convexa.

Por el contrario, si $x < 5$, $(x-5)^3$ es negativo y

$$f''(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 5)$$

La función es cóncava en el intervalo $(5, +\infty)$.

Teniendo en cuenta todos estos resultados, la gráfica de la función es:



, Dibujar la gráfica de la función $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Resolución:

1. Dominio de definición

Esta función está definida para todo valor de x .

2. Simetrías

No es una función par ni impar, pues $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 = -2x^3 - 3x^2$

$$f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x)$$

3. Puntos de corte con los ejes

$$y = x^2(2x - 3).$$

Si $y = 0$, $x^2(2x - 3) = 0$, obteniéndose como soluciones $x = 0$ y $x = 3/2$.

La curva pasa por los puntos $(0,0)$ y $(3/2,0)$.

Si $x = 0$, $y = 0$, punto que ya se tenía.

4. Asíntotas

Al no tener denominador no tiene asíntotas verticales.

Puesto que, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x) = \infty$, no tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3) = \infty$, no tiene asíntotas oblicuas, pues no se obtiene ningún valor de la pendiente.

5. Crecimiento y decrecimiento

$$y' = f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

Si $x > 1$, $y' > 0$ y la función es creciente \rightarrow creciente en $(1, \infty)$.

Si $x > 0$ pero $x < 1$, $y' < 0$ y la función es decreciente \rightarrow decreciente en $(0, 1)$.

Por último, si $x < 0$, $y' > 0$ y la función es creciente \rightarrow creciente en $(-\infty, 0)$.

6. Máximos y mínimos

Resolviendo la ecuación $f'(x) = 6x(x - 1) = 0$, se obtienen como soluciones $x = 0$ y $x = 1$.

La derivada segunda es $f''(x) = 12x - 6$.

$f''(0) = -6 < 0$ por lo que en $x = 0$ hay un máximo.

$f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0$ y en $x = 1$ hay un mínimo.

Para $x = 0$, $y = f(0) = 0$, y el máximo es $(0, 0)$.

Para $x = 1$, $y = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -1$; el mínimo es $(1, -1)$.

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Igualando a cero la segunda derivada, $f''(x) = 12x - 6 = 0$, se obtiene la solución

$$x = \frac{1}{2}.$$

Hay que comprobar si es o no punto de inflexión.

$$f''\left(\frac{1}{2} + h\right) = 12\left(\frac{1}{2} + h\right) - 6 = 6 + 12h - 6 = 12h > 0 \quad (h > 0)$$

$$f''\left(\frac{1}{2} - h\right) = 12\left(\frac{1}{2} - h\right) - 6 = 6 - 12h - 6 = -12h < 0 \quad (h > 0)$$

Como la derivada segunda es positiva a la derecha de $\frac{1}{2}$ y negativa a la izquierda,

$x = \frac{1}{2}$ hay un punto de inflexión.

Para $x = \frac{1}{2}$, $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$. El punto de inflexión es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Puesto que $f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$, $f''(x)$ es positiva si lo es $2x - 1$ y negativa cuando lo sea $2x - 1$.

$2x - 1$ es positivo para $x > \frac{1}{2}$. Por tanto, si $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ y la función es convexa.

$2x - 1$ es negativo siempre que $x < \frac{1}{2}$. En este caso $f'(x) < 0$ y la curva es cóncava.

 Después de este estudio puede dibujarse la curva.

f Dibujar la gráfica de la función $y = f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$

Resolución

1. *Dominio de definición*

La función está definida para todo valor de x .

2. *Simetrías*

$$f(-x) = (-x + 2)(-x - 1)^2 = (-x + 2)(x^2 + 2x + 1) = -x^3 + 3x + 2$$

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 3x + 2$$

$$-f(x) = -x^3 + 3x - 2$$

$f(x) \neq f(-x)$. La curva no es par.

$f(-x) \neq -f(x)$. La curva no es impar.

3. *Puntos de corte con los ejes*

Si $x = 0$, $y = (0 + 2)(0 - 1)^2 = 2$. La curva pasa por el punto $(0, 2)$.

Si $y = 0$, $0 = (x + 2)(x - 1)^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array} \right\}$ La curva pasa por $(-2, 0)$ y por $(1, 0)$.

4. *Asíntotas*

No tiene asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, no hay asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \infty; \text{ no hay asíntotas oblicuas.}$$

5. *Crecimiento y decrecimiento*

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Para que $y' > 0$ debe ser $x^2 - 1 > 0$

Para que $y' < 0$ debe ser $x^2 - 1 < 0$

Si $x^2 - 1 > 0$, o lo que es lo mismo, $x^2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

La curva es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$

Si $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x \\ x < 1 \end{cases}$

La curva es decreciente en $(-1, 1)$.

6. Máximos y mínimos

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = 6x.$$

Si $x = 1$, $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, hay un mínimo en el punto $(1, 0)$.

Si $x = -1$, $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, hay un máximo en el punto $(-1, 4)$.

7. Concavidad y convexidad

$$f''(x) = 6x \begin{cases} f''(x) = 6x > 0, \text{ si } x > 0. \text{ La función es convexa en } (0, +\infty) \\ f''(x) = 6x < 0, \text{ si } x < 0. \text{ La función es cóncava en } (-\infty, 0) \end{cases}$$


8. Puntos de inflexión

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(0 + h) = f''(h) = 6h > 0$$

$$f''(0 - h) = f''(-h) = 6 \cdot (-h) = -6h < 0$$

La curva pasa de cóncava a convexa: en $x = 0$ hay punto de inflexión.

 Si $x = 0$, $f(x) = 2$. El punto de inflexión es $(0, 2)$.

Ejercicio: optimización de funciones

La determinación de extremos de una función tiene otras aplicaciones que van más allá del trazado de curvas.

- De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 3 dm, encontrar el de mayor volumen.

Resolución:



El volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base por la altura:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

siendo r el radio de la base del cilindro.

Por el teorema de Pitágoras,

$$r^2 = 3^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 9 - \frac{h^2}{4}$$

Sustituyendo en la expresión de V ,

$$V = \pi \left(9 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = \pi \left(9h - \frac{h^3}{4}\right)$$

Así, V es una función de h . Para calcular las medidas del cilindro de mayor volumen hay que encontrar el máximo de la función $V(h)$.

Derivando respecto a h e igualando a cero,

$$V' = \pi \left(9 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3h^2}{4} = 9 \Rightarrow 3h^2 = 36;$$

$$h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

Hay que comprobar que para este valor de h , V alcanza su valor máximo.

En efecto, $V''(h) = -\pi \frac{6}{4} \cdot h$, y $V''(2 \cdot \sqrt{3}) = -\pi \frac{6}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} < 0$, luego V es máximo cuando $h = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Llevando este valor a la expresión de r^2 ,

$$r^2 = 9 - \frac{4 \cdot 3}{4} = 6$$

Luego $V = \pi \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}$, $V = 12 \pi \sqrt{3} \text{ dm}^3$.

, Hallar las dimensiones mínimas que debe tener una hoja de papel para contener una superficie útil de 54 cm^2 con unos márgenes de $1,5 \text{ cm}$ a derecha e izquierda y de 1 cm por arriba y por abajo.

Resolución:



Llamando x e y a las dimensiones del total de la hoja, y a y b a las dimensiones de la superficie útil,

$$\begin{aligned} S &= x \cdot y \\ a \cdot b &= 54 \end{aligned}$$

Despejando b , $b = \frac{54}{a}$. Por otro lado $x = 1,5 + a + 1,5 = 3 + a$,

$$y = 1 + 1 + \frac{54}{a} = 2 + \frac{54}{a}$$

Llevando estos valores de x e y a S , $S = (3 + a) \cdot \left(\frac{2a + 54}{a}\right)$

Operando,
$$S = 60 + \frac{162}{a} + 2a$$

Así, S es una función de a y se puede escribir $S(a) = 60 + \frac{162}{a} + 2a$.

El problema se reduce a calcular el valor de a que hace $S(a)$ mínimo; por tanto hay que encontrar el mínimo de $S(a)$.

Derivando respecto a a e igualando a cero,

$$S' = -\frac{162}{a^2} + 2 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{162}{a^2} \Rightarrow 2a^2 = 162 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$$

Para comprobar que en $a = 9$ hay un mínimo se calcula la derivada segunda de S :

$$S'' = \frac{324a}{a^4} = \frac{324}{a^3}$$

$S''(9) = \frac{324}{9^3} > 0$ por lo que en $a = 9$ hay, efectivamente, un mínimo.

Por último, si $a = 9$ cm, $b = \frac{54}{9}$ cm = 6 cm, $x = (3 + 9)$ cm = 12 cm,

$$y = \frac{2 \cdot 9 + 54}{9}$$
 cm = 8 cm.
