<u>**CALCULO DIFERENCIAL**</u>¡Error! Marcador no definido.

<u>**TEMA 1 : PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS**</u>

Teorema del signo.-
Sea f:[a,b] -->R una función continua en (a,b) entonces si $f(x_0)\neq 0$, existe un entorno $E(x_0,\delta)$ en que f tiene el mismo signo que $f(x_0)$.
Si $x_0=b$ (respectivamente $x_0=a$) entonces existe δ un tal que f toma en $(b-\delta,b)$ (respectivamente $(a,a+\delta)$ el mismo signo que $f(x_0)$.

Lema (de acotación).-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b] y $x_0 \in (a,b)$ entonces existe $\delta>0$ tal que f es acotada en $E(x_0,\delta)$.

Teorema de los ceros , de Bolzano.-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b], tal que f toma valores de signos distintos en los extremos a y b del intervalo, es decir, sign f(a) $\neq$ sign f(b). Entonces existe $c\in (a,b)$ tal que f(c)=0.

Teorema de los valores intermedios, de Darboux.-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en el intervalo cerrado [a,b] , entonces f toma todos los valores intermedios comprendidos entre f(a) y f(b).

Teorema de los extremos absolutos (del supremo y el ínfimo), de Weiestrass.-
Si f es una función continua en el intervalo [a,b], entonces f alcanza al menos una vez el máximo y el mínimo absolutos en dicho intervalo.

<u>**TEMA 2 : PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES**</u>

LEMA (de monotonía).-
Sea f : I-->R una función. Supongamos que $f'(t_0)>0$ en un punto t_0 interior. Entonces existe $\delta>0$ tal que $f(s)<f(t_0)<f(t)$ cuando $s\in (t_0-\delta,t_0)$ y $t\in (t_0,t_0+\delta)$, es decir, es creciente en t_0.
Análogamente si $f'(t_0)<0$, es decreciente en t_0.

Teorema de Rolle.-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b] y derivable en (a,b). Si f(a) = f(b) entonces existe $c\varepsilon(a,b)$ tal que f'(c) = 0.

Teorema de Cauchy.-
Sean f:[a,b]-->R y g:[a,b]-->R continuas en [a,b] y derivables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$[\, f(b) - f(a)\,]\, g'(c) = [\, g(b) - g(a)\,]\, f'(c) .$$

Teorema del valor medio (o de los incrementos finitos).-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces existe $c\varepsilon(a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Consecuencias del t.v.m.-
1.- T. del v.m. sobre monotonía.-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces

- si $f'(t)\geq 0$ para todo $t\varepsilon(a,b)$ entonces f es monótona creciente en [a,b].
- si $f'(t)\leq 0$ para todo $t\varepsilon(a,b)$ entonces f es monótona decreciente en [a,b].
- si $f'(t)=0$ para todo $t\varepsilon(a,b)$ entonces f es constante en [a,b].

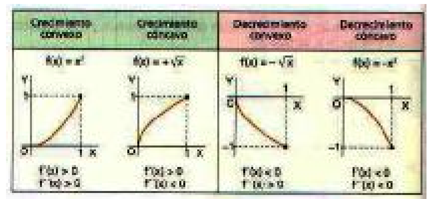
2.- Si f y g son funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b) tales que f'(x) = g'(x) para todo $x\in (a,b)$, entonces existe un numero real "c" tal que f(x) = g(x) + c para todo $x\in [a,b]$; es decir, las dos funciones f y g se diferencian en una constante.

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCION

Crecimiento y decrecimiento de una función

Definición:
Sea f : [a, b] -->R , $x_0 \in (a, b)$, se dice que f es creciente en x_0 si existe un entorno de x_0 , E (x_0, h) tal que
Si $x_0 - h < x < x_0$ $\quad f(x) < f(x_0)$
Si $x_0 < x < x_0 + h$ $\quad f(x_0) < f(x)$
Se dice que f es decreciente si (-f) es creciente.

Proposición 1 (monotonía).-
Sea f : (a, b)-->R una función derivable y $x_0 \in (a, b)$. Entonces :



si $f'(x_0)>0$, f es creciente en x_0.
si $f'(x_0)<0$, f es decreciente en x_0.

Observación : La condición es suficiente pero no es necesaria. Ej : $f(x) = x^3$

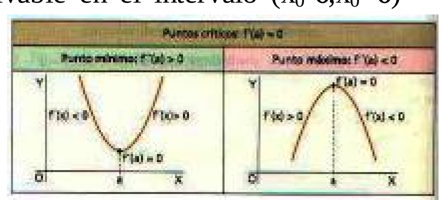
Proposición 2.-
Sea f : (a, b)-->R una función , $x_0 \in (a,b)$, f derivable en x_0 y creciente (decreciente). Entonces $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$) .

Máximos y mínimos relativos. Condiciones para la determinación de extremos.-

Definición: Sea f : [a, b] -->R , $x_0 \in (a, b)$, se dice que f tiene un máximo / mínimo relativo en, x_0 si existe un entorno de x_0 , E (x_0, h) tal que $\forall\, x \in$ E (x_0, h) se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$.

Condición necesaria.-
f derivable en $x_0 \in (a, b)$ y presenta en x_0 un máximo o mínimo, entonces $f'(x_0)=0$.

Condición suficiente.-
Proposición 1.- f : [a, b] -->R continua en I, $x_0 \in (a, b)$ y f derivable en el intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ contenido en I salvo quizás x_0.



a) si $f'(x)>0$, $x \in (x_0-\delta, x_0)$ *(f creciente a la izquierda de x_0)*
$f'(x)<0$, $x \in (x_0, x_0+\delta)$ *(f decreciente a la derecha de x_0)*
entonces f presente un **máximo** relativo en x_0.
b) Análogamente para **mínimo** relativo.

Proposición 2.-
f : [a, b] -->R , $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0) \neq 0$.
Entonces : $f''(x_0)>0$ entonces x_0 es mínimo relativo.
$f''(x_0)<0$ entonces x_0 es máximo relativo.

Añadir gráfico f'',f',f.

Condicion necesaria y suficiente.-
Sea f : [a, b] -->R continua en [a, b], $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0)=0$.
Supongamos que f admite derivadas sucesivas (finitas) en un intervalo centrado en x_0 y supongamos que la primera derivada que no se anula en x_0 es $f^{n)}(x_0)$, derivada n-esima de f.
En estas condiciones :
" La condición necesaria y suficiente para que f presente en x_0 un máximo o mínimo relativo es que "n" sea par. Además si $f^{n)}(x_0) < 0$ (> 0) será un máximo (mínimo) relativo."
Además si "n" es impar existe un punto de inflexión de tangente horizontal.

Concavidad y convexidad

Definición:

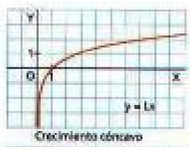
- Una función f es cóncava en el punto x_0 cuando la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ queda por debajo de la gráfica de la función.

De otra manera : Una función se dice cóncava hacia arriba si la recta que une dos puntos de la gráfica queda por encima de la gráfica.

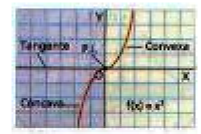
- Una función f es convexa en el punto x_0 cuando la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ queda por encima de la gráfica de la función.

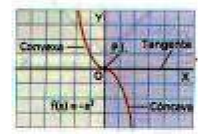
De otra manera : Una función se dice cóncava hacia abajo si la recta que une dos puntos de la gráfica queda por debajo de la gráfica.

Condición suficiente de concavidad

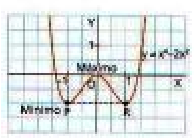


Si una función f es tal que $\forall\ x \in (a,b)$ $f''(x) > 0$ entonces f es cóncava hacia arriba en (a,b)
Si una función f es tal que $\forall\ x \in (a,b)$ $f''(x) < 0$ entonces f es cóncava hacia abajo en (a,b)





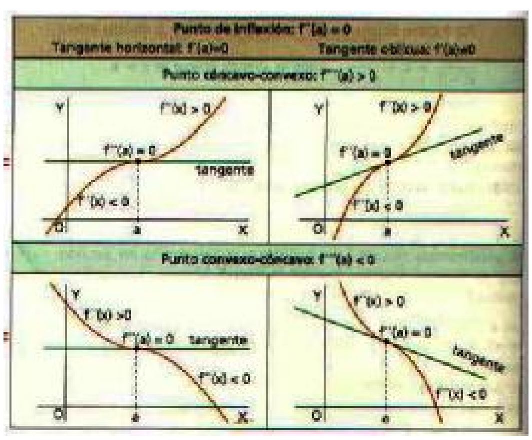
Punto de inflexión



Definición: Un punto x_0 se dice de inflexión de f si la función en ese punto cambia de concavidad, es decir, pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Por tanto, en ese punto $(x_0, f(x_0))$ la tangente atraviesa la gráfica.

Condición necesaria.- Si x_0 es punto de inflexión entonces $\mathbf{f''(x_0)=0}$

Condición suficiente.- Sea x_0 / $f''(x_0)=0$, entonces si además $f'''(x_0) \neq 0$, x_0 es punto de inflexión.



Regla de L'Hopital.-

Sea f,g : [a,b]-->R dos funciones verificando :

i) f,g son derivables en (a,b)

ii) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$

iii) Existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{R}$ (real o $\pm \infty$)

iv) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su valor es l.

Con este resultado se resuelven todos los casos de inderteminación del calculo de limites : 0/0 , ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0 * \infty$, 1^{∞} , ∞^0 y 0^0 ..

Representación de funciones

ESQUEMA A SEGUIR EN LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Propiedades de f obtenidas directamente	**Caracterización**
1. Dominio (D) de la función	$x \in D \Leftrightarrow$ Existe y tal que $y = f(x)$
Recorrido (R) de la función	$y \in R \Leftrightarrow$ Existe x tal que $y = f(x)$
2. Simetrías:	
a) Función par	$f(-x) = f(x)$ Eje de simetría OY
b) Función impar	$f(-x) = -f(x)$ Centro de simetría el origen
3. Periodicidad	$f(x + T) = f(x)$ T periodo mínimo
4. Puntos de corte con los ejes:	
a) Corte con el eje OX	$f(x) = 0$ Ninguno, uno o más puntos
b) Corte con el eje OY	$f(0) = y$ Ninguno o un punto
5. Regiones de existencia de la función:	
a) Intervalos de positividad	$f(x) > 0$ Gráfica por encima del eje OX
b) Intervalos de negatividad	$f(x) < 0$ Gráfica por debajo del eje OX
6. Ramas infinitas. Puntos en el infinito:	
a) Punto de partida de la gráfica	$(-\infty, ?)$ Cuadrantes II o III
b) Punto de llegada de la gráfica	$(+\infty, ?)$ Cuadrantes I o IV
7. Asíntotas:	
a) Asíntotas verticales: $x = u$	$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad (a = a, a^+, a^-)$
b) Asíntotas horizontales: $y = k$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$
c) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$,	$\mathbf{m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\mathbf{b} = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$, m y n reales
8. Puntos de discontinuidad	$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Propiedades de f obtenidas por las derivadas sucesivas	
9. Monotonía:	
a) Intervalos de crecimiento	$f' > 0$
b) Intervalos de decrecimiento	$f' < 0$
c) Puntos críticos	$f'(a)=0$ y $f''(a) > 0$ Mínimo
	$f'(a)=0$ y $f''(a) < 0$ Máximo
10. Curvatura:	
a) Intervalos de convexidad	$f'' > 0$
b) Intervalos de concavidad	$f'' < 0$
c) Puntos de inflexión	$f''(a)=0$ y $f'''(a) > 0$ Cóncavo - convexo
	$f''(a)=0$ y $f'''(a) < 0$ Convexo - cóncavo