INTRO. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Se abre aquí el estudio de uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: la derivada de una función.

En este tema, además de definir tal concepto, se mostrará su significado y se hallarán las derivadas de las funciones más usuales. Es de capital importancia dominar la derivación para después poder abordar el trazado de curvas, así como para comprender la utilidad del cálculo integral, que se estudiarán a continuación.

La noción de derivada es históricamente anterior al concepto de límite aunque actualmente se estudie aquélla inmediatamente después de éste, por razones que serán fácilmente comprensibles.

La derivada de una función en un punto x_0 surge del problema de calcular la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0, y fue Fermat el primero que aportó la primera idea al tratar de buscar los máximos y mínimos de algunas funciones. En dichos puntos las tangentes han de ser paralelas al eje de abscisas, por lo que el ángulo que forman con éste es de cero grados. En estas condiciones, Fermat buscaba aquellos puntos en los que las tangentes fueran horizontales

DERIV. DE UNA FUNC. EN UN PUNTO

Sea una función $y = f(x)$ y x_0 un punto del eje X. Si se toma un punto $x_0 + h$ muy próximo a x_0 (h es un número infinitamente pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ tiende a confundirse con la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Si α_h es el ángulo que forma la secante con el eje de abscisas, y α el ángulo que determina la tangente con ese mismo eje, en el triángulo rectángulo de vértices $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ y $(x_0 + h, f(x_0))$, se verifica:

$$tg\ \alpha_h = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$$

Al hacer tender h a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento de la tangente, $tg\ \alpha_h$ tiende a $tg\ \alpha$, es decir, a la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Esto se expresa matemáticamente así:

$$\lim_{h \to 0} tg\ \alpha_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = tg\ \alpha$$

<u>Derivada de una función en un punto</u>

Dada una función *y* = *f(x)*, se llama derivada de la función *f* en un punto x_0 al límite, si existe y es finito (un número), $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y se simboliza por $f'(x_0)$ (efe prima de equis sub-cero) o por $D(f(x_0))$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = D(f(x_0))$$

Cuando este límite existe (y es finito) se dice que la función *f(x)* es *derivable* en el punto x_0.

<u>Significado de la derivada</u>

Puesto que

$$tg\ \alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

la *derivada de la función en un punto* x_0 no es otra cosa que la *pendiente de la tangente* a la curva (gráfica de la función) en $(x_0, f(x_0))$.

Ejercicio: cálculo de la derivada de una función en un punto

- Calcular la derivada de la función *f(x)* = 3*x* + 5 en el punto de abscisa *x* = 1.

Resolución:

- Se pide el valor de *f''*(1) (en este caso, x_0 = 1).

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \left\} \begin{array}{l} f(1+h) = 3(1+h)+5 = 3h+8 \\ f(1) = 3\cdot 1+5 = 8 \end{array} \right.$$

- $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3h+8-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$

Por tanto, *f'*(1) = 3.

, Calcular la derivada de la función *f*(*x*) = $\sqrt{x}$ en el punto 2.

Resolución:

- $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \left\} \begin{array}{l} f(2+h) = \sqrt{2+h} \\ f(2) = \sqrt{2} \end{array} \right.$

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$, multiplicando numerador y denominador por

$\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ (conjugado del numerador)

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

Recordando que suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}) = 2 + h - 2 = h$$

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ejercicio: cálculo de la ecuación de la tangente a una función en un punto

---

- Calcular la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2.

Resolución:

- La tangente pasa por el punto $(2, f(2)) = (2,4)$.

- La pendiente de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 es, por definición, $f'(2)$, luego la ecuación de la recta es de la forma $y - 4 = f'(2)(x - 2)$.

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$

La ecuación de la tangente es entonces $y - 4 = 4(x - 2) \rightarrow y - 4 = 4x - 8 \rightarrow$
$4x - y - 4 = 0$.

Ejercicio: estudio de la derivabilidad de una función en un punto

---

- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)$ definida por

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en los puntos $x_1 = 1$ y $x_0 = 0$.

Resolución:

a) Derivabilidad en $x_1 = 1$.

Se han de considerar dos casos:

- Si $h > 0$, $1 + h > 1$ y en este caso $f(x) = x$. Por tanto:

$$\text{Si } h > 0,\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1+h-1}{h} = 1$$

Este límite es el «límite por la derecha» e indica que la tangente a la derecha de 1 tiene por pendiente 1.

- Si $h < 0$, $1 + h \leq 1$, y en este caso $f(x) = x^2$.

$$\text{Si } h < 0,\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} 2+h = 2$$

Este límite es el «límite por la izquierda» e indica que la tangente a la izquierda de 1 tiene por pendiente 2.

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 1, no existe tal límite y, por tanto, la función *f(x)* no es derivable en $x = 1$.

b) Derivabilidad en $x = 0$.

En este caso no es necesario considerar $h > 0$ y $h < 0$ ya que en las proximidades de cero (h es muy pequeño) la función es $f(x) = x^2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

El límite existe y es cero, luego *f(x)* es derivable en $x_0 = 0$ y la pendiente de la tangente es cero (paralela al eje de abcisas).

, Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ en el punto } x_0 = 0.$$

Resolución:

- $\text{Si } h > 0,\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h-0}{h} = 1$
- $\text{Si } h < 0,\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-h+0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1$

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 0, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en dicho punto.

● *¿Cuándo hay que considerar límites a derecha e izquierda al calcular la derivada de una función en un punto?*

Si al dibujar la curva se observa que en el punto considerado ésta cambia bruscamente de dirección, es necesario considerar límites a derecha e izquierda, puesto que, en este caso, la tangente no se comporta de igual modo y se «quiebra».

Consecuencias de la definición de derivada en un punto

1. Si existe la derivada de una función $f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, existen las derivadas a derecha e izquierda de x_0 y tienen que ser iguales; de lo contrario no existiría $f'(x_0)$.

Puede ocurrir, no obstante, que existiendo las derivadas a derecha e izquierda éstas sean distintas. En este caso no existe la tangente en $(x_0, f(x_0))$, sino dos semirrectas, cada una tangente a uno de los arcos en que el citado punto divide a la curva. Los puntos en que esto ocurre se llaman puntos angulosos.

Los puntos *A, B, C, D* y *E* de la gráfica de la ilustración son puntos angulosos: la curva cambia bruscamente de dirección en ellos. La función correspondiente no es derivable en las abscisas de dichos puntos.

No es difícil, consecuentemente, imaginar la gráfica de una función que no sea derivable en muchos e, incluso, infinitos puntos.

2. La idea que hasta ahora se tenía de tangente a una curva como la recta que posee un único punto común con ella no es nada apropiada. Si esto fuese así la curva de la fig. 1 no tendría tangente en el punto *P*, mientras que la curva de la fig. 2 contaría con infinitas tangentes en *Q*.

Tangente a una curva en un punto

El concepto de derivada facilita la definición de *tangente* a una curva en un punto como el límite de una secante que pasa por él y por otro punto cualquiera de la curva cuando éste último, recorriendo la curva, tiende a coincidir con el primero.

Propiedad

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Demostración:

Sea una función $y = f(x)$ derivable en un punto x_0. Para probar que la función es continua en él, es preciso demostrar que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

o lo que es equivalente, que

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$$

Pero

$f(x_0 + h) - f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$. Tomando límites cuando h tiende a 0,

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h,$$

de donde, por ser $f(x)$ derivable,

$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, resultado al que se quería llegar.

Esta propiedad evita el trabajo de estudiar la derivabilidad de una función en un punto donde ésta no sea continua.

Por el contrario, puede darse el caso de una función continua en todos los puntos y no ser derivable en alguno, e incluso infinitos puntos. Valga como ejemplo la función $|x|$, que siendo continua en todos los puntos de la recta real, no es derivable, como ya se ha comprobado, en el origen.

CÁLCULO DE DERIVADAS (I)

Derivada de una función constante

Sea una función constante $f(x) = C$.
Su gráfica es, como se sabe, una recta paralela al eje de abscisas. Puesto que para cualquier valor de la abscisa su ordenada correspondiente es, constantemente, igual a C, si a es un punto cualquiera del campo de definición de $f(x)$,

$f(a + h) - f(a) = C - C = 0$, por lo que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Luego la derivada de una constante es siempre cero.

$$\text{Si } f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

Derivada de la función lineal *mx + b*

Sea una función lineal cualquiera *f(x)* = *mx* + *b*. Para un punto cualquiera *x*,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{m\,h}{h} = m, \text{ y}$$

$$\lim_{h\to 0} m = m = f'(x),$$

lo cual significa que la derivada de una recta coincide con la pendiente de ella misma y, en consecuencia, la tangente en un punto a una recta es la propia recta.

$$\text{Si } f(x) = mx + b \Rightarrow f'(x) = m$$

Derivada de una constante por una función, *k · f(x)*

Si k es una constante y *f(x)* una función, la derivada de la nueva función *k · f(x)* será:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h} = \text{(Sacando factor común } k\text{, ya que no depende de } h.)$$

$$= k\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot f'(x)$$

Se ha demostrado que

$$(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$$

Así, para derivar una expresión de la forma *k · f(x)*, basta derivar la función *f(x)* y multiplicar después por la constante *k.*

Derivada de la función potencia x^m (*m* es un número natural)

Para calcular la derivada de la función *f(x)* = x^m, *m* > 0, hay que evaluar el cociente $\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$. Desarrollando por el binomio de Newton $(x+h)^m$,

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \frac{\binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}\cdot h + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h^2 + \ldots + \binom{m}{m} h^m - x^m}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{x^m} + \binom{m}{1} x^{m-1}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^m - \cancel{x^m}}{h} = \binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1}$$

Tomando límites cuando $h \to 0$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1}\right]$$

Salvo el término $\binom{m}{1} x^{m-1} = m\,x^{m-1}$, que no depende de h, el resto de los sumandos tiende a cero (su límite es cero).
Se concluye que

$$\text{Si } f(x) = x^m \Rightarrow f'(x) = m\,x^{m-1}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

- Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa - 1.

Resolución:

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

Entonces, la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en $x = -1$ es - 2.

Derivadas de las funciones trigonométricas *sen x* y *cos x*

La derivada de la función $f(x) = sen\,x$ es $f'(x) = cos\,x$

La derivada de la función $g(x) = cos\,x$ es $g'(x) = -sen\,x$

Las demostraciones son complejas y se pasan por alto.

$$\text{Si } f(x) = sen\,x \Rightarrow f'(x) = cos\,x \qquad \text{Si } g(x) = cos\,x \Rightarrow g'(x) = -sen\,x$$

Derivada de la función logaritmo neperiano *ln |x|*

Puesto que el logaritmo está definido sólo para valores positivos y distintos de cero, es necesario considerar el logaritmo del valor absoluto de x.

Para calcular la derivada de esta función se han de considerar dos casos, $x > 0$ y $x < 0$:

a) Si x es positivo, aun tomando h negativo, $x + h$ es positivo si se toman valores de h suficientemente pequeños, lo cual es posible pues se va a calcular el límite cuando h tiende a cero. En estas condiciones

$$|x+h| = x+h \text{ y } |x| = x$$

$$\frac{ln\,(|x+h|) - ln\,|x|}{h} = \frac{ln\,(x+h) - ln\,x}{h} = \frac{1}{h} \cdot (ln\,(x+h) - ln\,x) =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{x+h}{x} = \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Por tanto, si $x > 0$

$$\left[\ln(x) \right]' = \lim_{h \to 0} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right] =$$

$$= \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right] = \quad \longleftarrow \left[\begin{array}{l} \text{Llamando } \frac{h}{x} = n, \ h = nx \rightarrow \\ \qquad \rightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x} \\ \text{Si } h \rightarrow 0, \ n \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$= \ln \left[\lim_{n \to 0} \left((1+n)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{x}} \right] = \quad \leftarrow \left[\text{Recordando que } \lim_{n \to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e \right.$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

b) Si x es negativo, aun tomando h positivo y suficientemente pequeño, $x + h$ sigue siendo negativo y $|x + h| = -(x + h)$ y $|x| = -x$.

$$\frac{\ln(|x+h|) - \ln|x|}{h} = \frac{\ln(-(x+h)) - \ln(-x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{-(x+h)}{-x} \right) = \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{x+h}{h}$$

Como se aprecia, se llega a la misma expresión que en el caso anterior y la demostración se continuaría de forma idéntica.

$$\text{Si } f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

<u>Derivadas de las funciones exponenciales a^x y e^x</u>

Sea la función $y = a^x$, siendo a una constante positiva distinta de 1. La derivada de esta función en un punto x es:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} =$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Se hace el cambio $a^h - 1 = t \to a^h = t + 1$
y se toman logaritmos neperianos:

$$ln(a^h) = ln(t+1) \to h \; ln\; a = ln(t+1) \to$$

$$\to h = \frac{ln(t+1)}{ln\; a}$$

Cuando $h \to 0,\; t \to a^0 - 1 = 0 \;(t \to 0)$

Luego:

$$y' = a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{\frac{ln(t+1)}{ln\; a}} = a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{ln\; a}{\frac{1}{t} ln(t+1)} =$$

$$= a^x \cdot ln\; a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{1/t}} = \left(\begin{array}{l} \text{Pero } \lim_{t \to 0} ln(t+1)^{1/t} = \\ \qquad = ln \lim_{t \to 0} (t+1)^{1/t} = ln\; e = 1 \end{array} \right)$$

$$= a^x \cdot ln\; a \cdot \frac{1}{1} = a^x \cdot ln\; a$$

En particular, cuando la constante *a* es el número *e*, la derivada de la función e^x es

$$(e^x)' = e^x \cdot ln\; e = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$\text{Si } f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot ln\; a$$

$$\text{Si } g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$

Hasta el momento se saben derivar algunas funciones elementales pero no hay nada que permita encontrar las derivadas de una suma, un producto o un cociente de estas derivadas; se requiere, por consiguiente, seguir avanzando en la obtención de propiedades encaminadas a este fin.

Operaciones con funciones

Hay que recordar cómo se definen la suma, el producto y el cociente de funciones. Si *f* y *g* son dos funciones definidas en un mismo intervalo (en caso contrario, alguna de estas operaciones podría no estar definida),

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ se define:

- Función suma de *f* y *g* como la nueva función $f + g: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Función producto de *f* y *g* como la función $f \cdot g: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- Función cociente de *f* y *g*, $\frac{f}{g}: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

siempre que $g(x) \neq 0$ para todo *x* del intervalo.

<u>Derivada de una suma de funciones</u>

Si *f* y *g* son dos funciones derivables en un mismo punto *x* de un intervalo, la derivada de la función suma en dicho punto se obtiene calculando

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \text{(descomponiendo en suma de dos límites)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

<u>Derivada de una diferencia de funciones</u>

$f - g = f + (-g)$, por lo que $[f(x) + (-g(x))]' = f'(x) + (-g(x))'$

Pero $-g(x) = (-1) \cdot g(x)$ y la derivada de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

$$[-g(x)]' = [(-1) \cdot g(x)]' = (-1) \cdot g'(x) = -g'(x)$$

En consecuencia,

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

- Calcular la derivada de la función $f(x) = x - \cos x$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l}(x)' = 1\\ (\cos x)' = -\operatorname{sen} x\end{array}\right\} \to f'(x) = 1 - (-\operatorname{sen} x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

, Calcular la derivada de $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x + \ln|x|$ en el punto $x = -\pi/3$.

Resolución:

- $$\left.\begin{array}{l}(x^3)' = 3x^2\\ (\operatorname{sen} x)' = \cos x\\ (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}\end{array}\right\} \to f'(x) = 3x^2 - \cos x + \frac{1}{x}$$

- Sustituyendo x por $-\dfrac{\pi}{3}$ se obtiene:

$$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi}$$

Derivada de un producto de funciones

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un mismo punto x.

$$\frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = (1)$$

Si se suma y se resta en el numerador $f(x) \cdot g(x + h)$, la fracción anterior no varía,

$$(1) = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = (2)$$

Sacando $g(x + h)$ factor común en los dos primeros sumandos, y $f(x)$ en los otros dos,

$$(2) = \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h} =$$

$$= g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Si ahora se toman límites cuando h tiende a cero,

$\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$, pues g es continua en x ya que es derivable en x.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ por definición de derivada.

$\lim\limits_{h \to 0} f(x) = f(x)$, al no depender $f(x)$ de h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x) \text{ por definición.}$$

$$\text{Por tanto, } (f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

- Hallar la derivada de *h(x)* = *x* · *ln x* para cualquier *x* positivo.

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si se llama } f(x)=x,\ f'(x)=1\\ \text{Si } g(x)=\ln x,\ g'(x)=\dfrac{1}{x}\end{array}\right\} \to \left[f(x)\cdot g(x)\right]' = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

② Calcular la derivada de $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \ sen\ x$.

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f(x)=x^2,\ f'(x)=2x\\ \text{Si } g(x)=sen\ x,\ g'(x)=\cos x\end{array}\right\} h'(x) = \frac{1}{2}(2x\cdot sen\ x + x^2 \cos x)$$

CÁLCULO DE DERIVADAS (II)

<u>Derivada de un cociente de funciones</u>

Considérense, como en los casos precedentes, dos funciones *f* y *g* definidas y derivables en un punto *x*. Además, en este caso, se tiene que imponer la condición de que la función *g* no se anule en *x*.

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)\cdot h} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\cdot\frac{f(x+h)\,g(x)-f(x)\,g(x+h)}{h} = (1)$$

Si en la segunda fracción se suma y se resta al numerador *f(x)* · *g(x)*, se obtiene:

$$(1) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)} \cdot \frac{f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x) + f(x)\, g(x) - f(x)\, g(x+h)}{h} = (2)$$

Sacando factor común *g(x)* en los dos primeros sumandos de la segunda fracción, y *f(x)* en los dos últimos,

$$(2) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)} \cdot \frac{g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Por último, se toman límites cuando *h* tiende a cero notando que:

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ por la continuidad de g en x al ser g derivable en dicho punto.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ y $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ por definición de derivada.

En definitiva,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\right)\cdot g(x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] -$$

$$-f(x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left[g(x)\right]^2}\left[g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)\right]$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

---

① Calcular la derivada de $y = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ (m es un número natural).

Resolución:

$$y' = \frac{0\cdot x^m - 1\cdot m\cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} = -m\cdot \frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\cdot x^{m-1-2m} = -m\cdot x^{-m-1}$$

<u>Derivada de la función *tg x*</u>

Puesto que $tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$,

si *f(x) = sen x, f'(x) = cos x*
si *g(x) = cos x, g'(x) = - sen x*

Aplicando la fórmula de la derivada de un cociente,

$$(tg\ x)' = \frac{cos\ x \cdot cos\ x - sen\ x \cdot (-sen\ x)}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x}{cos^2 x} + \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

O bien, recordando que $sen^2 x + cos^2 x = 1$, $\dfrac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \dfrac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$

Por tanto,

$$(tg\ x)' = 1 + tg^2 x = sec^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$$

<u>Derivada de la función *sec x*</u>

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

Si *f(x)* = 1, *f'(x)* = 0
Si *g(x) = cos x, g'(x) = - sen x*

Por la fórmula de la derivada de un cociente,

$$(sec\ x)' = \frac{0 \cdot cos\ x - 1 \cdot (-sen\ x)}{cos^2 x} = \frac{sen\ x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos\ x} \cdot \frac{sen\ x}{cos\ x} = sec\ x \cdot tg\ x$$

(sec x)' = sec x · tg x

<u>Derivada de la función *cosec x*</u>

$$cosec\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

Si *f(x)* = 1, *f'(x)* = 0
Si *g(x) = sen x, g'(x) = cos x*

Por la derivada de un cociente,

$$(cosec\ x)' = \frac{0 \cdot sen\ x - 1 \cdot cos\ x}{sen^2 x} = \frac{-cos\ x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen\ x} \cdot \frac{-cos\ x}{sen\ x} = cosec\ x \cdot cotg\ x$$

(cosec x)' = - cosec x · cotg x

<u>Derivada de la función *cotg x*</u>

$$cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

Si *f(x) = cos x, f'(x) = - sen x*
Si *g(x) = sen x, g'(x) = cos x*

$$(cotg\ x)' = \frac{(-\ sen\ x)\cdot sen\ x - cos\ x \cdot cos\ x}{sen^2\ x} = \frac{-\ sen^2\ x - cos^2\ x}{sen^2\ x}$$

$$= -\frac{sen^2\ x}{sen^2\ x} - \frac{cos^2\ x}{sen^2\ x} = -1 - cotg^2 x$$

O haciendo uso de $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$, $\frac{-\ sen^2\ x - cos^2\ x}{sen^2\ x} = \frac{-1}{sen^2\ x} = -cosec^2 x$

Por tanto,

$$(cotg\ x)' = -(1 + cotg^2 x) = -cosec^2 x = \frac{-1}{sen^2\ x}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $h(x) = \frac{x\ cos\ x - 2}{x^2}$

Resolución:

● Llamando *f(x) = x cos x* - 2, *f'(x)* = 1 · *cos x* + *x* · *(- sen x)* = *cos x* - *x sen x* (la derivada de 2 es cero por ser una constante)

● Si *g(x)* = x^2, *g'(x)* = 2 *x*

● $h'(x) = \frac{(cos\ x - x\ sen\ x)\ x^2 - (x\ cos\ x - 2)\cdot 2\ x}{x^4} = \frac{-x\ cos\ x - x^2\ sen\ x + 4}{x^3}$

② Hallar la derivada de $h(x) = \frac{x\ tg\ x - cos\ x}{ln\ x}$

Resolución:

● Si *f(x) = x tg x - cos x, f'(x)* = 1 · *tg x + x*(1 + $tg^2 x$) - *(- sen x)* =

= *tg x + x*(1 + $tg^2 x$) + *sen x*

● Si $g(x) = ln\ x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

- $h'(x) = \dfrac{(tg\ x + x + x\ tg^2\ x + sen\ x)\ \ ln\ x - (x\ tg\ x - cos\ x) \cdot 1/x}{(ln\ x)^2}$

A pesar de contar ya con un número estimable de propiedades para el cálculo de derivadas, hay funciones elementales, como $\sqrt{x}$, para las que no se conoce ningún procedimiento para la obtención de su derivada. Para seguir avanzando por este camino se hace imprescindible conocer una de las propiedades más fundamentales y útiles de la derivación, aunque no se hará su demostración. Se la conoce como derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

REGLA DE LA CADENA

Esta propiedad asegura que si *y = f(x)* es una función derivable en un cierto intervalo **I**,

$$f:\ I \longrightarrow \mathbf{R},$$

y *z = g(y)* es otra función derivable y definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f,*

$$g:\ f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

entonces la función compuesta

$$g\ o f: I \longrightarrow f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

definida por (*g* o *f*) (x) = *g*[*f*(*x*)], es derivable en todo punto *x* de *I* y se obtiene

$$(g \circ f)'(x) = g'\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$$

Ejemplo: cálculo de derivadas

- Calcular la derivada de la función *h(x) = sen* x^2.

Resolución:

- La función *sen* x^2 es una función compuesta de otras dos *f(x)* = x^2 y *g(x) = sen x.*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 & \longrightarrow & sen\ x^2 \end{array}$$

En efecto, $(g\ o f)\ (x) = g\left[f(x)\right] = g(x^2) = sen\ x^2$

- Al ser *g(x) = sen x, g'(x) = cos x*, por tanto *g'*[*f(x)*] = *cos f(x) = cos* x^2

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

● Por la regla de la cadena,

$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 2x \cos x^2$

② Derivar la función $h(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

Resolución:

● $h(x)$ es una función compuesta de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ y $g(x) = x^3$

(Se ha de suponer que $x \neq 0$ porque para este valor la función no está definida.)

$$\mathbf{R} - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{x^2+1}{x} \longrightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$$

● De $g(x) = x^3$, se deduce $g'(x) = 3x^2$. En consecuencia,

$$g'[f(x)] = 3\, f(x)^2 = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$$

● Por otro lado, $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2}$

● Por la regla de la cadena,

$$\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

<u>Regla de la cadena para la función potencial</u>

Se sabe que la derivada de una función $f(x) = x^m$ es $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$.
Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$, la derivada de $u(x)^m$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow u(x)^m$$

aplicando la regla de la cadena, será:

$$[u(x)^m]' = m \cdot u(x)^{m-1} \cdot u'(x)$$

Para simplificar la notación, y a partir de ahora, se escribirá simplemente *u* en lugar de *u(x)*.

Así,

$$\text{Si } f(x) = u^m \Rightarrow f'(x) = (u^m)' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

- Calcular la derivada de $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

Resolución:

- Si $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$

En este caso $m = 3$

- $f'(x) = 3\,(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x\,(x^2 + 1)^2$

Regla de la cadena para la función logaritmo neperiano

Si en la derivada de logaritmo neperiano se sustituye *x* por una función de *x, u(x),* en virtud de la regla de la cadena se tiene que

$$(ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $f(x) = ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$

Resolución:

- Se toma $u = \frac{x^2+1}{x^2}$

- Se calcula *u'* aplicando la derivada de un cociente:

$$u' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

- Se aplica la regla de la cadena:

$$f'(x) = \left(ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right)' = -\frac{2}{x^3} : \frac{x^2+1}{x^2} = -\frac{2x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{-2}{x(x^2+1)}$$

, Hallar la derivada de $f(x) = ln\,|sen\,x\,|$

Resolución:

- $u = sen\,x$; $u' = cos\,x$

- $f'(x) = (ln\,|sen\,x|)' = \frac{u'}{u} = \frac{cos\,x}{sen\,x} = cotg\,x$

Regla de la cadena para las funciones exponenciales

Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$, por la regla de la cadena se tiene que para una función $f(x) = a^u$ y para otra $g(x) = e^u$,

$$f'(x) = (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot ln\,a$$

$$g'(x) = (e^u)' = u' \cdot e^u$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

- Calcular la derivada de $f(x) = 4^{x\,sen\,x}$

Resolución:

- Llamando $u = x \cdot sen\,x$, $u' = 1 \cdot sen\,x + x\,cos\,x$

$$f'(x) = (4^{x\,sen\,x})' = (sen\,x + x\,cos\,x) \cdot 4^{x\,sen\,x} \cdot ln\,4$$

② Calcular la derivada de $g(x) = e^{-x^2}$

Resolución:

- Si $u = -x^2$, $u' = -2x$; $g'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

Regla de la cadena para las funciones trigonométricas

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow sen\,u(x) \qquad (sen\,u)' = u' \cdot cos\,u$

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow cos\,u(x) \qquad (cos\,u)' = -u' \cdot sen\,u$

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow tg\,u(x) \qquad (tg\,u)' = (1 + tg^2\,u) \cdot u' = \frac{u'}{cos^2\,u} = u' \cdot sec^2\,u$

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow sec\,u(x) \qquad (sec\,u)' = u' \cdot sec\,u \cdot tg\,u$

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow cosec\,u(x) \qquad (cosec\,u)' = -u' \cdot cosec\,u \cdot cotg\,u$

$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow cotg\,u(x) \qquad (cotg\,u)' = -u'(1 + cotg^2 u) = \frac{-u'}{sen^2\,u}$

Ejercicio: cálcular la derivada

- Calcular la derivada de $f(x) = sen(sen\ x)$

Resolución:

- Si $u = sen\ x$, $u' = cos\ x$

$f'(x) = (sen(sen\ x))' = u' \cdot cos\ u = cos\ x \cdot cos(sen\ x)$

, Hallar la derivada de $g(x) = sec\ (x^2 - 1)$

Resolución:

- $u = x^2 - 1$; $u' = 2x$

- $g'(x) = (sec(x^2 - 1))' = u' \cdot sec\ u \cdot tg\ u = 2x \cdot sec(x^2 - 1) \cdot tg(x^2 - 1)$

f Calcular la derivada de $h(x) = sen^3 x^2$

Resolución:

- Llamando $u = sen\ x^2$, hay que derivar $sen^3 x^2 = u^3$.

- Por la regla de la cadena, la derivada de u^3 es $(u^3)' = 3 \cdot u^2 \cdot u'$

Llamando $v = x^2$; $u = sen\ v$.

$u' = v' \cdot cos\ v = 2x \cdot cos\ x^2$

- Finalmente, $h'(x) = (sen^3 x^2)' = 3u^2 \cdot u' = 3 \cdot sen^2 x^2 \cdot 2x \cdot cos\ x^2 =$
$= 6x \cdot sen^2 x^2 \cdot cos\ x^2$

Para calcular la derivada de una función que es inversa de otra, es necesario conocer un importante resultado, aunque se evita hacer su demostración.

Derivada de la función inversa

Si una función $y = f(x)$ admite una función inversa f^{-1} y la función $f(x)$ es derivable en un punto x_0, entonces la función f^{-1} es derivable en el punto $f(x_0)$.

En virtud de este teorema, la función $x^{1/n}$ es derivable por ser la función inversa de x^n:

$$x \longrightarrow x^n \longrightarrow (x^n)^{1/n} = x$$

Como consecuencia, al ser la función x^m derivable para cualquier número entero *m*, como ya se ha visto, la función $x^{m/n}$ es derivable por ser composición de dos funciones derivables:

$$x \longrightarrow x^m \longrightarrow x^{m/n}$$

Derivada de la función $x^{1/n}$

Sea $u = x^{1/n}$; elevando a *n*, $u^n = x$.

Derivando ambos miembros se observa que

$$\left.\begin{array}{l} (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \\ x' = 1 \end{array}\right\} nu^{n-1} \cdot u' = 1.$$

Despejando *u'*,

$$u' = \frac{1}{n \cdot u^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot x^{\frac{n-1}{n}}}$$

En particular, la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es $(x^{1/2})' = \dfrac{1}{2 \cdot x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivada de la función $x^{m/n}$

Sea $f(x) = x^{m/n}$

Se eleva a *n*, $f(x)^n = x^m$

Se deriva:

$$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) = m \cdot x^{m-1}$$

Pero $f(x)^{n-1} = (x^{m/n})^{n-1}$

Despejando $f'(x)$, $$f'(x) = \frac{mx^{m-1}}{n(x^{m/n})^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Regla de la cadena para las funciones $u^{1/n}$ y $u^{m/n}$

Si en las dos funciones anteriores se tiene una función dependiente de la variable *x, u(x),* en lugar de la función *x*, se obtienen las siguientes derivadas:

$$\text{Si } f(x) = u^{1/n} \Rightarrow f'(x) = (u^{1/n})' = \frac{u'}{n \cdot u^{\frac{n-1}{n}}}$$

En particular, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\text{Si } g(x) = u^{m/n} \Rightarrow g'(x) = (u^{m/n})' = \frac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$$

Para obtener estas igualdades, basta aplicar la regla de la cadena.

Ejercicio: cálculo de derivadas

---

① ¿Cuál es la función derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 + sen\ x}$

Resolución:

- Se escribe la raíz en forma de potencia: $\sqrt{x^2 + sen\ x} = (x^2 + sen\ x)^{1/2}$

- Se trata de calcular una derivada de la forma $u^{1/2}$.

Si $u = x^2 + sen\ x$, $u' = 2x + cos\ x$

- Obsérvese que en este caso $n = 2$

$$f'(x) = \left[\sqrt{x^2 + sen\ x}\right]' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x + cos\ x}{2\sqrt{x^2 + sen\ x}}$$

② Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2}$

Resolución:

- Se escribe la raíz en forma de potencia: $\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2/3}$

- $u = \dfrac{x+1}{x}$; $u' = \dfrac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x - x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

- Se aplica la fórmula $\left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\right]' = \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3x^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{3}} =$$

$$= -\frac{2}{3x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$$

FUNCIONES TRIGONOM. INVERSAS

La función *sen x* definida en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ toma todos los valores del intervalo $[-1, 1]$ una sola vez, es decir, dos números distintos de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alcanzan valores distintos en [- 1, 1].

Esto quiere decir que existe una aplicación biyectiva de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $[-1, 1]$ mediante la función *seno*. En estas condiciones se puede definir la aplicación inversa de *f(x) = sen x*, llamada «arco-seno» y que se simboliza por *arc sen x*.

Así, $arc\ sen\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ pues $sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$arc\ sen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ pues $sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -sen\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow[sen\ x]{f} [-1, 1] \xrightarrow[arc\ sen\ x]{f^{-1}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longrightarrow f(x) = sen\ x \longrightarrow f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(sen\ x) = arc\ sen\ (sen\ x) = x$$

Derivada de la función *arc sen x*

Si $y = arc\ sen\ x = f^{-1}(x)$, aplicando *f*, $f(y) = f(f^{-1}(x)) = x$, es decir, $sen\ y = x$.

Derivando respecto a x, por la regla de la cadena, $y' \cdot cos\ y = 1$ ó $y' = \frac{1}{cos\ y}$

De la conocida fórmula $sen^2\ y + cos^2\ y = 1$, $cos^2\ y = 1 - sen^2\ y \ \rightarrow$

$cos\ y = \pm\sqrt{1 - sen^2\ y}$;

pero en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $cos\ y$ es positiva, por lo que $cos\ y = \sqrt{1 - sen^2\ y}$.

Por último, y puesto que $sen\ y = x$, $cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$

Llevando este resultado a la expresión de y', $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\text{Si } h(x) = arc\ sen\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

<u>Derivada de la función *arc cos x*</u>

Análogamente, la función *cos x* tiene una función inversa llamada «arco-coseno» y se simboliza por *arc cos x.*

De *y* = *arc cos x* se deduce *x* = *cos y*. Derivando por la regla de la cadena,

$$1 = -y' \cdot sen\ y \rightarrow y' = \frac{-1}{sen\ y}$$

Como $sen\ y = \sqrt{1 - cos^2\ y} = \sqrt{1 - x^2}$, $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\text{Si } h(x) = arc\ cos\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

<u>Derivada de la función *arc tg x*</u>

La inversa de la función *tg x* se llama «arco-tangente» y se simboliza por *arc tg x*.

y = *arc tg x,* *x* = *tg y*. Derivando por la regla de la cadena,

$1 = y'(1 + tg^2\ y) = y'(1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$$\text{Si } h(x) = arc\ tg\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

<u>Derivada de la función *arc cotg x*</u>

La inversa de la función *cotg x* se llama «arco-cotangente» y se simboliza por *arc cotg x*.

Si *y* = *arc cotg x,* *x* = *cotg y*. Derivando esta igualdad por la regla de la cadena,

$1 = -y' \cdot (1 + cotg^2 y) = -y' \cdot (1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

$$\text{Si } h(x) = arc\ cotg\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

<u>Derivada de la función *arc sec x*</u>

Análogamente a los casos anteriores, *sec x* tiene una función inversa llamada «arco secante» y simbolizada por *arc sec x.*

y = *arc sec x*, *x* = *sec y.* Derivando por la regla de la cadena,

$$1 = y' \cdot sec\ y \cdot tg\ y = y' \cdot x \cdot tg\ y \quad (1)$$

Por trigonometría se sabe que $1 + tg^2 y = \dfrac{1}{cos^2 y} = sec^2 y = x^2$, de donde

$$tg^2 y = x^2 - 1 \rightarrow tg\ y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Sustituyendo este valor en la igualdad (1), $1 = y' \cdot x\sqrt{x^2 - 1}$, y despejando y',

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{Si } h(x) = arc\ sec\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

<u>Derivada de la función *arc cosec x*</u>

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior,

$$y = arc\ cosec\ x, \quad x = cosec\ y$$

Derivando: $1 = -y' \cdot cosec\ y \cdot cotg\ y = -y' \cdot x \cdot cotg\ y \quad (1)$

Como $1 + cotg^2 y = \dfrac{1}{sen^2 y} = cosec^2 y = x^2$, $cotg\ y = \sqrt{x^2 - 1}$

Llevando este resultado a la igualdad (1) y despejando y', $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\text{Si } h(x) = arc\ cosec\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

REGL. CADENA TRIG. INVERSAS

Si en cada una de las funciones anteriores se tuviese una función de *x, u(x)*, en lugar de la función *x*, las derivadas de las nuevas funciones compuestas se convierten, por la regla de la cadena en:

$$f(x) = arc\ sen\ u \qquad f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = arc\ cos\ u \qquad f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = arc\ tg\ u \qquad f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$f(x) = arc\ cotg\ u \qquad f'(x) = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$f(x) = arc\ sec\ u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

$$f(x) = arc\ cosec\ u \qquad f'(x) = \frac{-u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $y = arc\ sen\ \frac{x+1}{x-1}$

Resolución:

• Si $u = \frac{x+1}{x-1}$, por la derivada de un cociente,

$$u' = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

• $$y' = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}$$

② Hallar la derivada de $y = arctg\frac{ln\ x}{x}$

Resolución:

- Llamando $u = \frac{ln\ x}{x}$, $u' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - ln\ x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - ln\ x}{x^2}$
- $y' = \frac{1 - ln\ x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{ln\ x}{x}\right)^2} = \frac{1 - ln\ x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + (ln\ x)^2} = \frac{1 - ln\ x}{x^2 + (ln\ x)^2}$

③ Calcular la derivada de $y = arc\ sec \frac{5x^3}{3}$

Resolución:

- $u = \frac{5}{3}x^3$, $u' = \frac{5}{3}\cdot 3x^2 = 5x^2$
- $y' = \frac{5x^2}{\frac{5}{3}x^3\sqrt{\left(\frac{5}{3}x^3\right)^2 - 1}}$

④ ¿Cuál es la derivada de $y = arc\ cosec \sqrt{x^2 - 1}$?

Resolución:

- Si $u = \sqrt{x^2 - 1}$, $u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- $y' = \frac{-u'}{u\cdot\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - 1}\cdot\sqrt{x^2 - 1 - 1}} = \frac{-x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 2}}$

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Sea una función *y* = *f(x)*. Dado un punto de abscisa *x*, se le dota de un pequeñísimo incremento (aumento) *h* y se encuentra un punto *x* + *h*.

Se traza la tangente a la curva en el punto de abscisa *x*, y desde *x* + *h* se levanta una paralela al eje de ordenadas hasta cortar a la curva y a la tangente.

Si α es el ángulo que forma la tangente con el eje X,

$$tg\ \alpha = f'(x) = \frac{\overline{AC}}{h}$$

Diferencial de una función en un punto

Se define *diferencial de una función y = f(x)* en un punto *x*, y se simboliza por *dy* ó *df(x)*, al producto *f'(x) · h*. Por tanto,

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot h$$

Propiedades de la diferencial

Primera propiedad:

La diferencial de una función en un punto depende de dos variables: el punto *x* elegido y el incremento *h* que se ha tomado.

Segunda propiedad:

Al ser $dy = f'(x) \cdot h = \overline{AC}$, la diferencia de una función en un punto es el incremento (aumento) de la ordenada de la tangente al aumentar en *h* un punto de abscisa *x*.

Tercera propiedad:

Si se considera la función $y = f(x) = x$, $df(x) = dx = f'(x) \cdot h = 1 \cdot h = h$. Así, $dx = h$ y se puede escribir $d(f(x)) = dy = f'(x) \cdot dx$, y pasando dx al primer miembro, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Cuarta propiedad:

Puesto que $dy = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de la noción de límite se deduce que cuando *h* es infinitamente pequeño, el cociente *dy* es prácticamente igual a $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, y puesto que $h = dx$, dy es prácticamente igual a $f(x+h) - f(x)$. Es decir, $dy \approx f(x+h) - f(x)$. Esta propiedad permitirá sustituir dy por $f(x+h) - f(x)$ cuando *h* es muy pequeño, con la seguridad de que el error cometido será mínimo.

Ejercicio: cálculos aproximados utilizando la diferencial

- Un móvil se mueve según la relación $s = 5t^2 + t$, donde *s* representa el espacio recorrido medido en metros y *t* el tiempo medido en segundos.

Se quiere saber los metros que recorre el móvil en el tiempo comprendido entre 7 segundos y $\left(7 + \frac{1}{3}\right)$ segundos.

Resolución:

● Diferenciando la expresión $s = 5t^2 + t$,

$$ds = (10t + 1) \cdot dt$$

Por otro lado, $dt = 7 + \frac{1}{3} - 7 = \frac{1}{3}$

● Sustituyendo en la expresión de *ds*,

$$ds = (10 \cdot 7 + 1) \cdot \frac{1}{3} = 23{,}66 \text{ (metros)}$$

● En la figura se observa que en realidad recorre algo más de 23,66 metros:

$$s = 5\left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(7 + \frac{1}{3}\right) - \left(5 \cdot 7^2 + 7\right) = 24{,}18 \text{ metros.}$$

Se ha cometido un error de 24,18 m - 23,66 m = 52 cm

, Calcular $3{,}05^2$.

Resolución:

Para encontrar un resultado aproximado de $3{,}05^2$ se considera la función $y = x^2$.

Diferenciando esta función, $dy = 2x\, dx$.

Por la proximidad de 3,05 a 3 (5 centésimas) se calculará la diferencial en el punto de abscisa $x = 3$ y se llevará a la expresión de *dy.*

En este caso $dx = 3{,}05 - 3 = 0{,}05$

$$dy_{x\,=\,3} = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}30$$

Por tanto, aproximadamente, $3{,}05^2 = 9 + 0{,}30 = 9{,}30$.

Si se calcula con exactitud el valor de $3{,}05^2$ se obtiene 9,3025. Se observa que se ha cometido un error de 9,3025 - 9,30 = 0,0025, ¡25 diezmilésimas!