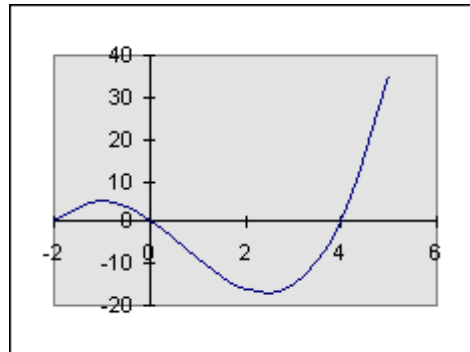


# DERIVADAS

## Tema: La derivada como pendiente de una curva

Para hallar la pendiente de una curva en algún punto hacemos uso de la recta tangente de una curva en un punto.



La pendiente de la curva en el punto P es la pendiente de la recta tangente en P.

## Definición: La pendiente de una curva

En  $(x, f(x))$  la pendiente  $m$  de la gráfica de  $y = f(x)$  es igual a la pendiente de su recta tangente en  $(x, f(x))$  y queda determinada por la fórmula:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

supuesto que el límite exista.

Para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva mediante la definición de límite seguimos los siguientes pasos:

1) Calcular :

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2) Hacer

para obtener

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Ejemplo para discusión:** Considera la gráfica de  $y = 3 - x^2$ .

- 1) Halla la fórmula de la pendiente de la gráfica.
- 2) Indica cuál es la pendiente en los puntos (0,3) y (-2,-1).
- 3) Halla la ecuación de la recta tangente para cada uno de los puntos anteriores.

**Nota:** Algunas curvas puede que no tengan tangente en cada punto.

**Definición:** El límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama **derivada de f en x** (supuesto que el límite existe) y se denota por **f'(x)**.

La notación **f'(x)** se lee "f prima de x". También se usa mucho la notación:

$$\frac{dy}{dx}$$

que se lee " la derivada de y respecto a x".

**Nota:** Una función es **derivable** en x si existe su derivada en x.

**Ejemplos para discusión:** Halla la derivada de:

$$1) y = 2x - 3$$

$$2) f(x) = x^3 + 2x$$

$$3) g(x) = \frac{2}{x}$$

**Nota:** En cualquier punto donde la tangente es vertical, la pendiente es infinita; la derivada, por tanto, no existe.

## Tema: Reglas de Derivación

Ya hemos calculado derivadas a través de la definición de la derivada como límite. Este procedimiento resulta en muchas ocasiones largo y tedioso.

Existen varias reglas que nos permiten calcular la derivada sin usar directamente los límites.

Regla de las constantes: La derivada de una función constante es cero. Esto es, si  $f(x) = c$ , para alguna constante  $c$ , entonces  $f'(x) = 0$ .

Ejemplos:

$$1) f(x) = 5; f'(x) = 0$$

$$2) g(x) = 0; g'(x) = 0$$

$$3) f(x) = \sqrt{3}; f'(x) = 0$$

$$4) y = \frac{-3}{5}; y' = 0$$

Regla de las potencias: Si  $f$  es una función diferenciable y  $f(x) = x^n$ , entonces

$f'(x) = nx^{n-1}$ , para cualquier número real  $n$ .

Ejemplos:

$$1) f(x) = x^4$$

$$2) g(x) = x^{-2}$$

$$3) h(x) = \sqrt{x}$$

$$4) f(x) = x^0$$

Regla del producto por un escalar: Si  $cf(x)$  es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Ejemplos:

$$1) f(x) = 3x^2$$

$$2) g(x) = 6x^{-5}$$

$$3) h(x) = \frac{-3}{5}x^{10}$$

$$4) f(x) = -2\sqrt{x}$$

Regla de la suma: La derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas. Esto es, si  $f$  y  $g$

son funciones diferenciables, entonces :

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

Ejemplos: Deriva las siguientes funciones y evaluarla en los casos indicados.

$$1) g(x) = x^3 - 4x + 2; c = 2$$

$$2) f(x) = \frac{-1}{2}x^4 + 3x^3 - 2x; c = -1$$

$$3) h(t) = 5 - \frac{1}{2t^3}; c = 2$$

$$4) y = \frac{5}{2x^3}$$

$$5) y = \frac{5}{(2x)^3}$$

$$6) y = \frac{7}{3x^{-2}}$$

$$7) y = \sqrt{3x}$$

$$8) y = \frac{1}{2^3\sqrt{x^2}}$$

Ejercicio: Halla la derivada de:

$$1) y = 5x^2 - 3x + 7$$

$$2) y = \frac{2}{x}$$

### Tema: Derivadas de orden superior

Como la derivada de una función es otra función, entonces podemos tratar de hallar su derivada. Si hacemos tal cosa, el resultado es de nuevo una función que pudiera ser a su vez derivada. Si continuamos así una y otra vez, tenemos lo que se conoce por **derivadas de orden superior**.

Por ejemplo, si  $f(x) = 6x^3 - 5x^2$ , entonces la:

primera derivada es :  $f'(x) = 18x^2 - 10x$

segunda derivada es:  $f''(x) = 36x - 10$

tercera derivada es :  $f'''(x) = 36$

cuarta derivada es :  $f^{(4)}(x) = 0$

.

n-ésima derivada es :  $f^{(n)}(x) = 0$

Ejemplos para discusión:

1) Si  $f(x) = -x^4 + 2x^3 + x + 4$ , halla  $f'''(-1)$ .

2) Halla las primeras cuatro derivadas de :

$$y = \frac{2}{x}$$

**Nota:** Si  $f'(x)$  representa la pendiente de la gráfica de  $f$ , entonces  $f''(x)$  representa la pendiente de la gráfica de  $f'$ . Así también,  $f'''(x)$  representa la pendiente de la gráfica de  $f''$ .

**Tema: Velocidad y Aceleración**

**Definición:** Si  $s(t)$  representa la función posición de un objeto en el tiempo  $t$  que se mueve a lo largo de una recta, la **velocidad** del objeto en el instante  $t$ , está dada por:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

**Ejemplo:** Un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación

$s(t) = 2t^2 - 12t + 10$ , donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos.

1) Completa la tabla de valores e ilustra en una recta numérica el movimiento del objeto.

$t$	$s(t)$
0	
1	
2	
3	
4	

2) Halla la velocidad del objeto cuando  $t = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Si  $s(t) = 2t^2 - 12t + 10$ , entonces  $v(t) = s'(t) = 4t - 12$ . Por tanto:

$v(0) =$

$$v(1) =$$

$$v(2) =$$

$$v(3) =$$

$$v(4) =$$

3) Indica cuándo la velocidad a cero.

**Nota:** La velocidad puede ser negativa. Para el movimiento horizontal consideramos la velocidad negativa cuando el objeto se mueve hacia la izquierda y positiva cuando el objeto se mueve hacia la derecha. La velocidad es cero cuando el objeto invierte su sentido de dirección.

Cuando el objeto se lanza al aire verticalmente, consideramos la velocidad positiva mientras el objeto se está elevando, cero cuando alcanza su altura máxima y negativa cuando cae.

**Definición:** Si  $s(t)$  es la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la **aceleración** del objeto en el instante  $t$ , está dada por  $a(t) = v'(t) = s''(t)$ , donde  $v(t)$  es la velocidad en  $t$  tiempo.

**Ejemplo:** Se dispara un proyectil directamente hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad de 400 pies/seg. Su distancia sobre la superficie de la tierra después de  $t$  segundos está dada por la ecuación  $s(t) = -16t^2 + 400t$ .

1) Halla el tiempo cuando el proyectil toca la superficie de la tierra.

2) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

3) ¿Cuál es la aceleración en cualquier tiempo?

**Nota:** La derivada de una función se puede interpretar de dos maneras:

1) Interpretación geométrica: Donde  $f'(c)$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(c, f(c))$ .

2) Interpretación física: Cuando la posición de un objeto en  $t$  tiempo está dada por  $s(t)$ , entonces  $s'(t)$  es la velocidad instantánea del objeto en  $t$ .

## Tema: Reglas de derivación para productos y cocientes

**Regla del producto**: La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera. Esto es,

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

Ejemplos para discusión:

1)  $F(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

2)  $G(x) = (1 + x^{-1})(x - 1)$

**Regla del cociente**: La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador dividido todo por el cuadrado del denominador. Esto es,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

donde  $g(x)$  es diferente de cero.

Ejemplos para discusión:

$$1) y = \frac{2x^3}{3x+1}$$

$$2) f(x) = \frac{-7}{3x^2-5}; c = 1$$

Ejercicio de práctica: Halla la derivada de:

$$1) y = (x+1)(x^2+1)$$

$$2) y = \frac{x-1}{x+7}$$

$$3) y = \frac{(1-2x)(3x+2)}{5x-4}$$

## Tema: Reglas de Derivación

### Regla de la Cadena

Si  $y = f(u)$  es una función derivable de  $u$  y  $u = g(x)$  es una función derivable de  $x$ , entonces  $y = f(g(x))$  es una función derivable y :

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(u) \cdot g'(x).$$

Ejemplo: Si  $y = 3u^{15}$  y  $u = 2x - 1$ , entonces la derivada es el producto de:

$(15)(3u^{14})(2) = 90u^{14}$ . Finalmente, al sustituir a  $u$  por  $2x - 1$ , tenemos que la derivada es  $90(2x - 1)^{14}$ .

## Regla de las Potencias

Si  $y = [u(x)]^n$  donde  $u$  es una función derivable de  $x$  y  $n$  es un número real, entonces:

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

Ejemplos: Halla la derivada de:

$$1) f(x) = (3x - 2x^2)^3$$

$$2) g(x) = 3(2x - 1)^{15}$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x^2 + 2)^2}$$

$$4) h(x) = \frac{-7}{(2x - 3)^2}$$

$$5) y = \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 3}\right)^2$$

Ejercicio de práctica: Halla la derivada de:

$$1) y = (3x^2 + 1)^4$$

$$2) y = \frac{-4}{(x + 2)^2}$$

## Tema: Derivadas de funciones trigonométricas

### A. Derivadas de funciones trigonométricas básicas

$\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}[\text{sec}(x)] = \sec(x) \tan(x)$
$\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\text{sen}(x)$	$\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -\text{csc}^2(x)$
$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x)$	$\frac{d}{dx}[\text{csc}(x)] = -\text{csc}(x) \cot(x)$

Ejemplos para discusión: Halla la derivada de:

1)  $y = 3 \text{ sen } x$

2)  $y = x + \cos x$

3)  $y = \frac{\text{sen}(x)}{2}$

4)  $y = x - \tan x$

5)  $y = x \text{ sec } x$

6)  $y = \frac{1 - \cos(x)}{\text{sen}(x)}$

Ejercicio de práctica: Halla la derivada de:

1)  $y = 2 \cos x$

2)  $y = x^2 - \text{sen } x$

3)  $y = \text{sec } x \tan x$

## B. Derivadas de funciones trigonométricas

$$1) \frac{d}{dx}[\text{sen}(u)] = \cos(u) \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx}[\cos(u)] = -\text{sen}(u) \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx}[\tan(u)] = \sec^2(u) \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d}{dx}[\cot(u)] = -\text{csc}^2(u) \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d}{dx}[\sec(u)] = \sec(u) \tan(u) \frac{du}{dx}$$

$$6) \frac{d}{dx}[\text{csc}(u)] = -\text{csc}(u) \cot(u) \frac{du}{dx}$$

Ejemplos para discusión: Halla la derivada de:

$$1) y = \text{sen } 2x$$

$$2) y = \cos(x - 1)$$

$$3) y = x^2 \tan x^2$$

Ejercicio de práctica: Halla la derivada de:

$$1) y = \cos 3x^2$$

$$2) y = \text{sen}(3x^2 + 5x - 7)$$

$$3) y = \tan(2x^2 + 3)$$

## Tema: Derivación implícita

Hasta el momento las ecuaciones han sido expresadas en forma explícitas. Esto es, la ecuación ha sido expresada respecto a una variable en términos de la otra. Por ejemplo,  $y = 2x - 3$  es una ecuación expresada respecto de  $y$  en términos de  $x$ .

Pero existen ecuaciones que no están dadas explícitamente. Por ejemplo, las ecuaciones:

$$2x + y = 4$$

$$xy = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

no están dadas en forma explícita. Tales ecuaciones están expresadas en forma implícita. Para derivar una ecuación implícita no es necesario expresarla en forma explícita. Se puede utilizar un método conocido por **derivación implícita**. Es un método que consiste en derivar cada término por separado en la ecuación dada.

La notación :

$$\frac{dy}{dx}$$

se lee "la derivada de  $y$  respecto a  $x$ ". Para entender cómo hallar la derivada de  $y$  con respecto a  $x$  implícitamente, se debe observar que la derivación se efectúa respecto de  $x$ . Esto es, cuando derivamos términos que contienen sólo a  $x$ , se deriva como de costumbre, pero al derivar términos con  $y$  se aplica la regla de la cadena.

Ejemplos: Deriva respecto a  $x$  las siguientes expresiones:

1)  $4x^2$

2)  $2y^3$

3)  $x + 2y$

4)  $xy^3$

Ejemplos: Halla la derivada de  $y$  respecto a  $x$  de:

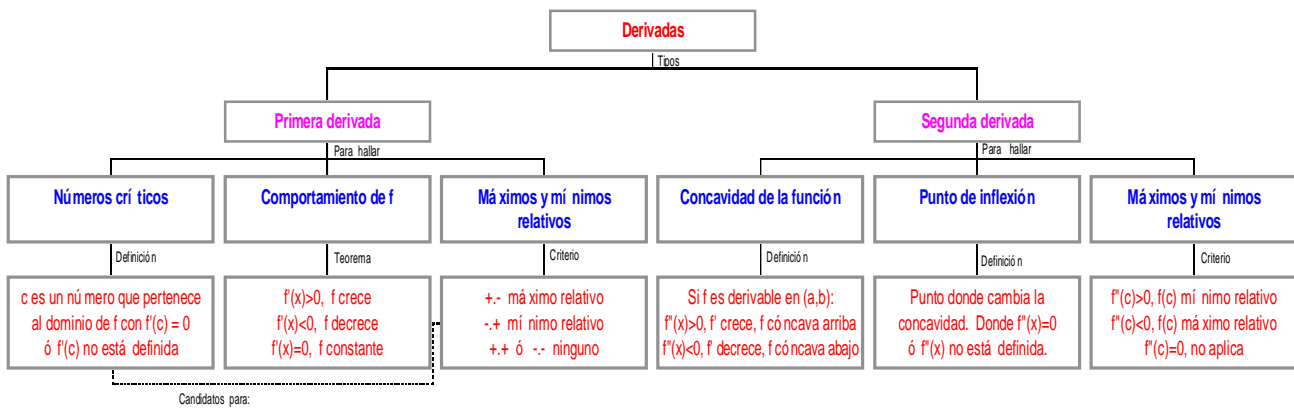
1)  $x^2 + y^2 = 9$

2)  $x^2y^3 = 1$

3)  $\text{sen } y = x$

4) Calcula la pendiente de la recta tangente a  $x^2 + xy + y^2 = 7$  en el punto  $(1,2)$ .

## APLICACIONES DE LA DERIVADA



## DERIVACION

