INTRO. LA INTEGRAL INDEFINIDA

Se inicia en este tema el estudio de la integral, concepto fundamental de lo que se conoce como cálculo infinitesimal, que alcanzó su auge y desarrollo durante el siglo XVII .

Aunque la utilidad del cálculo integral es alta y variada, ésta no se presentará con toda su fuerza hasta tomar contacto con la integral definida. El objetivo de este tema y del siguiente es mostrar las técnicas más comunes para el cálculo de integrales más o menos sencillas; una vez conocidas estas técnicas, llegará el momento de explotar su uso en el cálculo de áreas y volúmenes.

Hay, primordialmente, dos matemáticos coetáneos íntimamente ligados a los inicios del cálculo infinitesimal, el inglés Newton (1642-1727) y el alemán Leibniz (1646-1716), si bien, hubo otros matemáticos que de una u otra forma trabajaron en ello, como Kepler, Fermat (1601-1665), Cavalieri (1598-1647), incluso Arquímedes (Ap. 288 a.C.- Ap. 213 a.C.), que utilizó un método para el cálculo de áreas que se aproxima rudimentariamente al cálculo integral.

Newton y Leibniz (Newton unos años antes) sientan las bases del análisis infinitesimal aunque por vías distintas, quedando fuera de toda sospecha que alguno se aprovechase de los hallazgos del otro. Aunque en los inicios se comunicaban los progresos que hacía cada uno, llegaron a surgir comentarios de matemáticos ajenos a todo ello que, en ocasiones, calificaban la obra de Newton como plagio de la de Leibniz; en otras ocasiones era a la inversa, y esto provocó la enemistad de ambos.

Todo esto hizo que Newton, poco antes de morir y habiendo fallecido Leibniz unos años antes, ordenara suprimir un comentario de su obra «Principia» en el que se citaba a su otrora amigo como autor de un procedimiento de cálculo similar al suyo.

Leibniz es, además, el responsable de la actual simbología del cálculo infinitesimal, y no sólo eso; fue el primer matemático que utilizó el · para expresar una multiplicación y : para denotar un cociente, entre otras muchas más aportaciones.

FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Dada una función cualquiera *f(x)* definida en un intervalo cerrado [*a*,*b*], se llama *función primitiva* de *f(x)* a otra función *F(x)* cuya derivada sea *f(x)* en dicho intervalo. Es decir, *F'(x)* = *f(x)* para todo *x* de [*a*,*b*].

Así:

La función *sen x* es una primitiva de *cos x* puesto que *(sen x)' = cos x*.

La función $ln\ |x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ ya que $(ln\ |x|)' = \frac{1}{x}$.

La derivada de $\frac{x^3}{3}$ es $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Así, $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de la función x^2.

PROP. DE LAS PRIM. DE UNA FUNC.

Primera propiedad
Si *F(x)* es una primitiva de *f(x)* y *C* una constante cualquiera (un número), la función *F(x)* + *C* es otra primitiva de *f(x).*

Demostración:

Basta recordar que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones, y que la derivada de una constante es siempre cero.

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

Ejercicio: primitivas de una función

- Encontrar tres primitivas de la función *cos x.*

Resolución:

- Se sabe que *sen x* es una primitiva de *cos x.*

- Tres primitivas de *cos x* son, por ejemplo,

$$sen\, x + 3,\ sen\, x - \ln 2,\ sen\, x + \frac{\pi}{3}$$

Segunda propiedad
Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas primitivas.

Demostración:

Si *F(x)* es una primitiva de *f(x)*, para cualquier constante *C, F(x)* + *C* es otra primitiva según la anterior propiedad. Así, hay tantas primitivas como valores se le quieran dar a *C*.

Tercera propiedad
Dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante. Esto es, si *F(x)* y *G(x)* son primitivas de la función *f(x)*, entonces *F(x)* - *G(x)* = *C* = cte.

Demostración:

Hay que recordar que si una función *f(x)* definida en un intervalo cualquiera tiene derivada cero en todos los puntos, entonces la función *f(x)* es constante. Es decir, si *f'(x)* = 0, entonces *f(x)* = *C*.

Pues bien, si *F(x)* es una primitiva de *f(x), F'(x)* = *f(x);*
si *G(x)* es otra primitiva de *f(x), G'(x)* = *f(x).*

Restando miembro a miembro, *F'(x)* - *G'(x)* = *(F(x)* - *G(x))'* = *f(x)* - *f(x)* = 0, de donde se deduce que *F(x)* - *G(x)* = *C*.

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNC.

Se llama *integral indefinida* de una función *f(x)*, al conjunto de todas las primitivas de la función *f(x)*, y se simboliza

$$\int f(x)\, dx$$

Esta expresión se lee «integral de efe de equis diferencial de equis».
Por las propiedades de la función primitiva, si *F(x)* es una primitiva de *f(x),*

$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$

donde *C* representa una constante llamada *constante de integración.*

Ejercicio: cálculo de primitivas

① Calcular $\int \cos x\, dx$.

Resolución:

● Puesto que una primitiva de *cos x* es *sen x,*

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

② Hallar $\int \frac{1}{x}\, dx$.

Resolución:

●Una primitiva de $\frac{1}{x}$ es $\ln |x|$.

Por consiguiente,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

③ Encontrar $\int x^2\, dx$.

Resolución:

●Por ser $\frac{x^3}{3}$ una primitiva de x^2, $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

INTEGRALES INMEDIATAS

De la derivación de funciones elementales se deducen sus correspondientes integrales llamadas inmediatas. Es necesario aprender estos resultados si se pretende ser ágil en el cálculo de otras integrales menos sencillas.

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ y

$\int dx = x + C$

2. $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ si $m \neq -1$

3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ siendo $a > 0$ y $a \neq 1$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = sen\,x + C$

8. $\int tg\,x\,dx = -\int \dfrac{-sen\,x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int cotg\,x\,dx = \int \dfrac{\cos x}{sen\,x} = \ln|sen\,x| + C$

10. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = tg\,x + C$

11. $\int \dfrac{1}{sen^2\,x}\,dx = \int cosec^2\,x\,dx = -cotg\,x + C$

12. $\int \sec x \cdot tg\,x\,dx = \sec x + C$

13. $\int \mathit{cosec}\; x \cdot \mathit{cotg}\; x\, dx = -\,\mathit{cosec}\; x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathit{arc\ sen}\; x + C = -\,\mathit{arc\ cos}\, x + C$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2}\, \mathit{arc\ tg}\; x + C = -\,\mathit{arc\ cotg}\; x + C$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathit{arc\ sec}\; x + C = -\,\mathit{arc\ cosec}\; x + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

20. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

Ejercicio: cálculo de integrales inmediatas

① Calcular $\int x^4\, dx$

Resolución:

- Es una integral inmediata perteneciente al segundo caso, en el que *m* = 4.

$$\int x^4\, dx = \int \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

② Hallar $\int \frac{1}{x^5}\, dx$

Resolución:

$$\int \frac{1}{x^5}\, dx = \int x^{-5}\, dx = \text{(En este caso } m = -5\text{)}$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

③ Calcular $\int x^2\sqrt{x^3}\,dx$

Resolución:

• Escribiendo $\sqrt{x^3}$ en forma de potencia, $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

• Por la propiedad del producto de potencias de la misma base,

$$x^2\sqrt{x^3} = x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{2+\frac{3}{2}} = x^{\frac{7}{2}} \quad \left(\text{En este caso } m = \frac{7}{2}\right)$$

Por tanto,

$$\int x^2\sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{7}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + C = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^9} + C$$

④ Hallar $\int 3^x\,dx$

Resolución:

• Es una integral inmediata perteneciente al cuarto caso en el que *a* = 3.

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

... Comprobar la veracidad del vigésimo caso de integral inmediata.

Resolución:

• Hay que probar la certeza de la igualdad

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Basta demostrar que la derivada de la función

$\frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ es $\frac{1}{1-x^2}$.

• Recordando que $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ y llamando $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, por la derivada de un cociente,

$$u'(x) = \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Así,

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2(1-x)}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Se concluye que

$$\left(\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Por consiguiente,

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (I)

Integración por descomposición

Este método se basa en la aplicación de dos propiedades elementales de las integrales:

- *Primera propiedad de las integrales*

La integral de una suma (respectivamente diferencia) de funciones, es igual a la suma (respectivamente diferencia) de las integrales de las funciones.

Esto es,

$$\int[f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$
$$\int[f(x)-g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, $\int f(x)\ dx = F(x) + C_1$

Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$, $\int g(x)\ dx = G(x) + C_2$

Entonces, *F(x)* + *G(x)* es una primitiva de *f(x)* + *g(x)* y *F(x) - G(x)* es una primitiva de *f(x) - g(x)*, ya que:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$
$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

Por tanto,

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 =$$
$$= \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Análogamente,

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

● *Segunda propiedad de las integrales*

La integral del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la integral de la función.

Es decir,

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.

Pero $(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, lo que indica que $k \cdot F(x)$ es una primitiva de $k \cdot f(x)$. Por tanto,

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot F(x) + C_1 = k \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{k}\right) = k \cdot (F(x) + cte) =$$
$$= k \cdot \int f(x)\, dx$$

Ejercicio: cálculo de integrales aplicando el método por descomposición

① Calcular $\int (3x^2 + 5x)\, dx$

Resolución:

• Por la primera propiedad, $\int (3x^2 + 5x)\, dx = \int 3x^2\, dx + \int 5x\, dx$

• Por la segunda propiedad, $\int 3x^2\, dx = 3 \cdot \int x^2\, dx$ y $\int 5x\, dx = 5 \cdot \int x\, dx$

• Pero $\int x^2\, dx$ y $\int x\, dx$

son integrales inmediatas pertenecientes al segundo caso.

En la primera, $m = 2$, y en la segunda, $m = 1$.
Así,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C_1\ ;\ \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$

Por consiguiente,

$$\int (3x^2 + 5x)\,dx = 3\int x^2\,dx + 5\int x\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C = x^3 + \frac{5x^2}{2} + C$$

② Calcular $\int (sen\ x + 3\ tg\ x)\,dx$

Resolución:

$$\int (sen\,x + 3\ \ tg\,x)\ dx = \int sen\,x\,dx + \int 3\ \ tg\,x\ dx = \int sen\,x\ dx + 3\int tg\,x\ dx =$$
$$= -\cos x - 3\ \ln|\cos x| + C$$

③ Calcular $\int (x^2 - 1)^2\,dx$

Resolución:

- Desarrollando por la fórmula del cuadrado de un binomio:

$(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

- Así,

$$\int (x^2 - 1)^2\ dx = \int (x^4 - 2x^2 + 1)\ dx = \int x^4\ dx - 2\int x^2\ dx + 1\int dx =$$
$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

④ Calcular $\int (3 - t^2)\ \sqrt{t}\ dt$

Resolución:

(Obsérvese que ahora la variable es *t* y no *x*. Conviene acostumbrarse al manejo de cualquier variable aunque la más utilizada sea la *x*.)

- Expresando $\sqrt{t}$ en forma de potencia, $\sqrt{t} = t^{1/2}$.

- Aplicando la propiedad distributiva del producto:

$$(3 - t^2)\ \sqrt{t} = (3 - t^2)\cdot t^{1/2} = 3\cdot t^{1/2} - t^2\cdot t^{1/2} = 3t^{1/2} - t^{5/2}$$

- Entonces,

$$\int (3 - t^2)\ t^{1/2}\ dt = \int (3t^{1/2} - t^{5/2})\ dt = 3\int t^{1/2}\ dt - \int t^{5/2}\ dt =$$

$$= 3\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = 3\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C =$$

$$= \frac{2\cdot 3}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + C = 2\,t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + C$$

⑤ Calcular $\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2}\,dx$

Resolución:

- Descomponiendo la fracción en suma de fracciones:

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 2x - 7 - 4x^{-2}$$

- Por tanto,

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2}\,dx = \int 2x\,dx - \int 7\;dx - \int 4\cdot x^{-2}\;dx =$$

$$= 2\int x\;dx - 7\int dx - 4\int x^{-2}\;dx =$$

$$= \frac{2x^2}{2} - 7x - 4\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x^2 - 7x - \frac{4\cdot x^{-1}}{-1} + C = x^2 - 7x + \frac{4}{x} + C$$

⑥ Calcular $\int\left(3x^2 + \cos x + \frac{7}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$

Resolución:

$$\int\left(3x^2 + \cos x + \frac{7}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx = 3\int x^2\;dx + \int \cos x\,dx + 7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \operatorname{sen} x + 7\;\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C =$$

$$= x^3 + \operatorname{sen} x + 7\;\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

Integración por cambio de variable (o sustitución)

Este método consiste en transformar la integral dada en otra más sencilla mediante un cambio de la variable independiente. Aunque algunos casos tienen un método preciso, es la práctica, en general, la que proporciona la elección del cambio de variable más conveniente.

Se comenzará por estudiar aquellas integrales que son casi inmediatas.

• $\int u'(x) \cdot u(x)^m \, dx = \dfrac{u(x)^{m+1}}{m+1} + C$ si $m \neq -1$

Se sabe que la derivada de $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ es x^m.

Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$, $x \to u(x) \to u(x)^m$, la regla de la cadena asegura que la derivada de $\dfrac{u(x)^{m+1}}{m+1}$ es $u(x)^m \cdot u'(x)$.

Por tanto,

$$\int u' \cdot u^m \, dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \text{ si } m \neq -1$$

Como se ve, se ha escrito *u* en lugar de *u(x)* por simplificar la notación.

Ejercicio: cálculo de integrales inmediatas por cambio de variable

① Calcular $\int 2x\,(1+x^2)^3 \, dx$

Resolución:

• Si se hace el cambio $u(x) = 1 + x^2$, se observa que $u'(x) = 2x$

• Así, $\int 2x\,(1+x^2)^3 \, dx = \int u' \cdot u^3 \, dx = \dfrac{u^{3+1}}{3+1} + C = \dfrac{u^4}{4} + C = \dfrac{(1+x^2)^4}{4} + C$

② Calcular $\int x\,(x^2 - 3) \, dx$

Resolución:

• Haciendo el cambio $u = x^2 - 3;\ u' = 2x$

• Sin embargo, en la integral no se tiene 2*x* sino *x*. Este contratiempo se solventa sin más que observar que $x = \dfrac{1}{2} \cdot 2x$, es decir, basta multiplicar y dividir por la constante (en este caso 2) que falta.

$$\int x\,(x^2-3)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-3)\,dx = \frac{1}{2}\int u' \cdot u\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-3)^2 + C$$

③ Hallar $\int \cos x \cdot sen^3 x\, dx$

Resolución:

- Si se observa que $(sen\, x)' = \cos\, x$, llamando $u = sen\, x$, $u' = \cos\, x$.

$$\int \cos x \cdot sen^3 x\, dx = \int u' \cdot u^3\, dx = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} sen^4 x + C$$

④ Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Resolución:

- Se escribe la raíz en forma de potencia, $\sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{1/2}$
- $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/2}} = x^2\, (1+x^3)^{-1/2}$
- Se hace el cambio $u = 1 + x^3 \rightarrow u = 3x^2$
- Se multiplica y se divide por 3:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int x^2\, (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2\, (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} + C$$

- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = ln\, |u(x)| + C$

En el tercer caso de integral inmediata, es claro que la derivada de $ln\, |x|$ es $\frac{1}{x}$.

Si en lugar de *x* se tuviese una función de *x, u(x),* la derivada de *ln* | *u*(*x*) |, por la regla de la cadena es $\frac{u'(x)}{u(x)}$, por lo que

$$\int \frac{u'}{u} dx \quad ln\, |u| \quad C$$

Ejercicio: cálculo de integrales por cambio de variable

---

① Calcular $\int \frac{x^2}{2x^3-7}dx$

Resolución:

- Haciendo el cambio $u = 2x^3 - 7$, $u' = 6x^2$.

- Se multiplica y se divide por 6:

$$\int \frac{x^2}{2x^3-7}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2}{2x^3-7}dx = \frac{1}{6}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{6}\ \ln\left|2x^3-7\right| + C$$

② Calcular $\int (1+tg\,x)^2\ dx$

Resolución:

- Desarrollando, $(1+tg\,x)^2 = 1+2\ tg\,x + tg^2\,x = 1 + tg^2\,x + 2\ tg\,x = sec^2\,x + 2\ tg\,x$

Por tanto,

$$\int (1+tg\,x)^2\ dx = \int (sec^2\,x + 2\ tg\,x)\ dx = \int sec^2\,x\,dx + 2\int tg\,x\,dx$$

- Escribiendo $tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$

$$\int (1+tg\,x)^2\ dx = \int sec^2\ dx + 2\int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx = tg\,x + 2\int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx$$

- Mediante el cambio $u = cos\,x$, $u' = -\ sen\,x$.

$$\int (1+tg\,x)^2\ dx = tg\,x - 2\int \frac{-\,sen\,x}{cos\,x}dx = tg\,x - 2\ \ln\left|cos\,x\right| + C$$

- $\int u'(x)\cdot e^{u(x)}\ dx = e^{u(x)} + C$

La derivada de e^x es la propia función e^x. Si en lugar de *x* se tuviese una función *u*(*x*), la derivada de $e^{u(x)}$ por la regla de la cadena es $e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

Por consiguiente,

$$\int u'\cdot e^u\ dx = e^u + C$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (II)

Ejercicio: cálculo de integrales mediante cambio de variable

---

① Calcular $\int 5x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$

Resolución:

- En primer lugar se saca de la integral la constante 5.

- Del cambio $u = x^3$ se tiene que $u' = 3x^2$

- Se multiplica y se divide por 3:

$$\int 5x^2 \cdot e^{x^3}\, dx = 5\int x^2 \cdot e^{x^3}\, dx = \frac{5}{3}\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\, dx =$$
$$= \frac{5}{3}\int u' \cdot e^{u}\, dx = \frac{5}{3}e^{u} + C = \frac{5}{3}e^{x^3} + C$$

② Hallar $\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x\, dx$

Resolución:

- Se hace el cambio $u = \cos x;\ u' = -\operatorname{sen} x.$

- Se multiplica y se divide por - 1.

$$\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x\, dx = -\int e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)\, dx = -e^{\cos x} + C$$

③ Calcular $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

Resolución:

- Si $u = \sqrt{x},\ u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Se multiplica y se divide por 2:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

- $\int u'(x) \cdot a^{u(x)}\, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$

Haciendo un estudio análogo a los anteriores, se deduce que

$$\int u' \cdot a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

• $\int u'(x) \, sen \, u(x) \, dx = -\cos u(x) + C$ y $\int u'(x) \cos u(x) \, dx = sen \, u(x) + C$

La derivada de *- cos x* es *sen x*. Por la regla de la cadena, la derivada de *- cos u* es *u' · sen u*. Análogamente, la derivada de *sen u* es *u' · cos u*.

Así se tienen

$$\int u' \cdot sen \, u \, dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cdot \cos u \, dx = sen \, u + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular $\int 5x^2 \cdot sen \, x^3 \, dx$

Resolución:

• No se debe confundir la expresión $sen \, x^3$ con $sen^3 \, x$.
La primera de ellas significa *sen (x · x · x)*, mientras que la segunda es *(sen x) · (sen x) · (sen x)*.

• Se hace el cambio $u = x^3$; $u' = 3x^2$

• Se saca el factor 5 de la integral.

• Se multiplica y se divide por 3.

$$\int 5x^2 \cdot sen \, x^3 \, dx = 5 \int x^2 \cdot sen \, x^3 \, dx = \frac{5}{3} \int 3x^3 \cdot sen \, x^3 \, dx = -\frac{5}{3} \cos x^3 + C$$

• Como en casos anteriores es sencillo demostrar que:

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \int u' \cdot sec^2 \, u \, dx = tg \, u + C$$

$$\int \frac{u'}{sen^2 \, u} dx = \int u' \cdot cosec^2 \, u \, dx = -cotg \, u + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular $\int \frac{13x}{\cos^2 (5x)^2} dx$

Resolución:

- Se saca de la integral la constante 13.
- Se hace el cambio $u = (5x)^2 = 25x^2;\ u' = 50x$
- Se multiplica y se divide por 50:

$$\int \frac{13x}{\cos^2 (5x)^2}\,dx = 13\int \frac{x}{\cos^2 (5x)^2}\,dx = \frac{13}{50}\int \frac{50x}{\cos^2 (5x)^2}\,dx =$$
$$= \frac{13}{50}\,tg\ (5x)^2 + C$$

② Hallar $\int cosec^2\, 3x\, dx$

Resolución:

- Se hace el cambio $u = 3x,\ u' = 3$
- Se multiplica y se divide por 3.

$$\int cosec^2\, 3x\, dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot cosec^2\, 3x\, dx = \frac{1}{3}\int u'\cdot cosec^2\, u\, dx =$$
$$= \frac{-1}{3}\,cotg\ u + C = \frac{-1}{3}\,cotg\, 3x + C$$

③ Calcular $\int \frac{3}{x^2}\cdot sec^2\left(\frac{x-1}{x}\right) dx$

Resolución:

- Se extrae la constante 3 de la integral.
- Se hace el cambio $u = \frac{x-1}{x}$

Por la derivada de un cociente,

$$u' = \frac{1\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{3}{x^2}\cdot sec^2\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = 3\int \frac{1}{x^2}\cdot sec^2\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = 3\int u'\cdot sec^2\, u\, dx =$$
$$= 3\ \ tg\, u + C = 3\ \ tg\left(\frac{x-1}{x}\right) + C$$

Si *u* es una función de *x*, derivando por la regla de la cadena la función *sec u*, se obtiene *u'* · *sec u* · *tg u*. Análogamente, la derivada de la función - *cosec u* es *u'* · *cosec u* · *cotg u*. Por tanto,

$$\int u' \cdot \sec u \cdot tg\, u\, dx = \sec u + C$$

$$\int u' \cdot cosec\, u \cdot cotg\, u\, dx = -\ cosec\, u + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

---

① Calcular $\int \sec 2x \cdot tg 2x\, dx$

Resolución:

● Se hace el cambio $u = 2x;\ u' = 2.$

● Se multiplica y se divide por 2:

$$\int \sec 2x \cdot tg\ 2x\, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sec 2x \cdot tg\ 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int u' \cdot \sec u \cdot tg\ u\, dx = \frac{1}{2} \sec 2x + C$$

② Hallar $\int x \cdot cosec\, x^2 \cdot cotg\, x^2\ dx$

Resolución:

● Se hace el cambio $u = x^2;\ u' = 2x$

● Se multiplica y se divide por 2:

$$\int x \cdot cosec\ x^2 \cdot cotg\ x^2\ dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot cosec\ x^2 \cdot cotg\ x^2\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}(-\,cosec\ x^2) + C = -\frac{1}{2} cosec\ x^2 + C$$

③ Calcular $\int \frac{sen\ 2x}{\cos^2 2x} dx$

Resolución:

● Hay que observar que $\frac{sen\ 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{sen\ 2x}{\cos 2x} = \sec 2x \cdot tg\ 2x$

● Se hace el cambio $u = 2x;\ u' = 2$ y se multiplica y se divide por 2:

$$\int \frac{sen\ 2x}{cos^2\ 2x}\,dx = \int sec\ 2x \cdot tg\ 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot sec\ 2x \cdot tg\ 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int u' \cdot sec\ u \cdot tg\ u\,dx = \frac{1}{2}sec\ u + C =$$
$$= \frac{1}{2}sec\ 2x + C$$

● De los casos 14, 15 y 16 de integrales inmediatas se deducen, de forma similar a como se ha hecho en los casos anteriores, las siguientes integrales inmediatas por cambio de variable:

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = arc\ \ sen\ \ u + C = -arc\ \ cos\ \ u + C$$
$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = arc\,tg\ u + C = -arc\,cotg\ u + C$$
$$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\,dx = arc\ \ sec\ \ u + C = -arc\ \ cosec\ \ u + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

---

① Calcular $\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

Resolución:

●Se escribe $4x^2$ en la forma $(2x)^2$.

Así, se ve claro que el cambio que se ha de efectuar es:

$$u = 2x;\ u' = 2$$
$$\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx =$$
$$= arc\ \ sen\ \ u + C = arc\ \ sen\ \ 2x + C$$

② Calcular $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

Resolución:

●$9x^2 = (3x)^2$. Si se hace el cambio $u = 3x;\ u' = 3$.

● Se multiplica y se divide por 3:

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \frac{1}{3}arc\ \ tg\ \ 3x + C$$

③ Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^3}}$

Resolución:

● Esta integral, aparentemente, no pertenece a ninguno de los tres casos, aunque tiene cierto parecido a una integral del primer caso.

● Se escribe $25-16x^2 = 25\left(1-\frac{16}{25}x^2\right) = 25\left(1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2\right)$

Por tanto, $\sqrt{25-16x^2} = \sqrt{25\left(1-\left(\frac{4x}{5}\right)^2\right)} = 5\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}$

● Se hace el cambio $u = \frac{4}{5}x;\ u' = \frac{4}{5}$

● Se multiplica y se divide por $\frac{4}{5}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^3}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}\int \frac{\frac{4}{5}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \frac{1}{4}\,arc\ sen\ u + C = \frac{1}{4}\,arc\ sen\frac{4}{5}x + C$$

La técnica utilizada para resolver esta integral es de uso frecuente en el cálculo de integrales de cualquiera de estos tres modelos que se están estudiando.

④ Hallar $\int \frac{dx}{4+3x^2}$

Resolución:

● Siguiendo los pasos del anterior ejercicio:

$$4+3x^2 = 4\left(1+\frac{3}{4}x^2\right) = 4\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2\right)$$

● Esta integral pertenece al segundo de los dos casos. El cambio que se debe efectuar es $u = \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ u' = \frac{\sqrt{3}}{2}$

● Se multiplica y se divide por $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dx}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\int \frac{u'\,dx}{1+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arc\ tg\ u + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arc\ tg\frac{\sqrt{3}}{2}x + C$$

⑤ Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

Resolución:

• De nuevo en este caso es preciso transformar la expresión $x\sqrt{x^2-9}$ para que dé lugar a una integral del tercer caso:

$$x^2-9 = 9\left(\frac{x^2}{9}-1\right) = 9\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2-1\right)$$

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2-1\right)} = 3\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}$$

Así, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{dx}{3x\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}}$

• Haciendo el cambio $u = \frac{x}{3}$, $u' = \frac{1}{3}$.

Por tanto, es necesario multiplicar y dividir por 3.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{3x}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}}$$

• Como es preciso tener $u' = \frac{1}{3}$ en el numerador, se multiplica y se divide por $\frac{1}{3}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{9}\int \frac{3\cdot\frac{1}{3}dx}{\frac{x}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} = \frac{3}{9}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\frac{x}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{u'\,dx}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{3}\,arc\ sec\ u + C = \frac{1}{3}\,arc\ sec\,\frac{x}{3} + C$$

- De los casos 17, 18, 19, y 20 de integrales inmediatas se obtienen las siguientes integrales inmediatas por cambio de variable:

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx = ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx = ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$$

$$\int \frac{u'}{u^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (III)

Ejercicio: cálculo de integrales

---

① Calcular $\int \frac{dx}{6x^2-1}$

Resolución:

- Esta integral pertenece al tercero de los casos. Basta escribir $6x^2 - 1$ de forma adecuada: $6x^2 - 1 = (\sqrt{6}\,x)^2 - 1$

- Se hace el cambio $u = \sqrt{6}\,x$, $u' = \sqrt{6}$.

- Para tener $\sqrt{6}$ en el numerador, se multiplica y se divide por $\sqrt{6}$:

$$\int \frac{dx}{6x^2-1} = \int \frac{dx}{(\sqrt{6}\,x)^2-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{\sqrt{6}\,dx}{(\sqrt{6}\,x)^2-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{u'\,dx}{u^2-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ ln\left|\frac{\sqrt{6}\,x-1}{\sqrt{6}\,x+1}\right| + C$$

② Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+1}}$

Resolución:

- Escribiendo 25 x^2 en la forma $(5x)^2$, el cambio a efectuar es $u = 5x$; $u' = 5$.

- Se multiplica y se divide por 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(5x)^2+1}} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{\sqrt{(5x)^2+1}} = \frac{1}{5}\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{5}\ ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ ln\left|5x+\sqrt{(5x)^2+1}\right| + C$$

③ Calcular $\int \frac{dx}{4-x^2}$

Resolución:

- Transformando adecuadamente 4 - x^2, esta integral es del cuarto tipo:

$$4-x^2 = 4\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

- Haciendo el cambio $u = \frac{x}{2}$; $u' = \frac{1}{2}$. Se multiplica y divide por $\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{2}{4}\int \frac{u'}{1-u^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{4}\ ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$$

Integrales de la forma $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx$

Se estudia aquí esta integral por resolverse mediante un cambio de variable y por su frecuente uso en el cálculo de áreas y volúmenes mediante integrales definidas, que se estudiarán más adelante.

Para resolver una integral del tipo $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx$, siendo a una constante cualquiera, se hace uso del cambio de variable, $x = a \cdot sen\ t$.

Diferenciando, $dx = a \cdot cos\ t\ dt$.

Así,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\, sen^2\, t} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\, t)} = \sqrt{a^2 \cdot cos^2\, t} = a \cdot cos\, t.$$

Por tanto, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\; dx = \int a\, cos\, t \cdot a\, cos\, t\, dt = a^2 \int cos^2\, t\, dt$

Por trigonometría se sabe que:

$$cos\, 2\, t = cos^2\, t - sen^2\, t$$

$$1 = cos^2\, t + sen^2\, t$$

Sumando miembro a miembro las igualdades $\Big\} \rightarrow$ $1 + cos\, 2\, t = 2\, cos^2\, t$, de donde

$$cos^2\, t = \frac{1 + cos\, 2\, t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2\, t$$

En consecuencia,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\; dx = a^2 \int cos^2\, t\, dt = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2\, t \right) dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1}{2}\, dt + a^2 \int \frac{1}{2} cos\, 2\, t\, dt = a^2 \cdot \frac{1}{2}\, t + a^2 \cdot \frac{1}{2} \int cos\, 2\, t\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2\, cos\, 2\, t\, dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} sen\, 2\, t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} sen\, 2\, t \right) + C$$

Recordando que *sen* 2 *t* = 2 *sen t* · *cos t,*

$$\frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} sen\, 2\, t \right) = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \cdot 2\, sen\, t\, cos\, t \right) = \frac{a^2}{2} \left(t + sen\, t\, cos\, t \right)$$

Puesto que $x = a\; sen\, t$, $sen\, t = \frac{x}{a}$, y como $cos^2\, t = 1 - sen^2\, t,$

$$cos^2\, t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Por otro lado, de $sen\, t = \frac{x}{a}$, $t = arc\; sen \frac{x}{a}$.

Se llega, finalmente, a la siguiente igualdad:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\; dx = \frac{a^2}{2} \left(arc\; sen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular $\int \sqrt{9-x^2}\ dx$

Resolución:

- Cambio de variable:

$$x = 3\ sen\ t$$
$$dx = 3\ cos\ t\ dt$$

$$\bullet \int \sqrt{9-x^2}\ dx = \int \sqrt{9-9\ sen^2 t}\cdot 3\ cos\ t\ dt =$$
$$= \int 3\ \sqrt{1-sen^2 t}\cdot 3\ cos\ t\ dt =$$
$$= \int 3\ cos\ t \cdot 3\ cos\ t\ dt = 9\int cos^2\ t\ dt$$

$\bullet$Como $cos^2\ t = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos\ 2\ t,$

$$\int \sqrt{9-x^2}\ dx = 9\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos\ 2\ t\right)dt = \frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\int cos\ 2\ t\ dt =$$
$$= \frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cdot cos\ 2\ t\ dt = \frac{9}{2}t+\frac{9}{4}sen\ 2\ t + C =$$
$$= \frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}sen\ 2\ t\right)+C$$

- Se deshace el cambio:

$$x = 3\ sen\ t \Rightarrow sen\ t = \frac{x}{3} \Rightarrow t = arc\ sen\frac{x}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 2\ t = 2\ sen\ t\ cos\ t \\ cos\ t = \sqrt{1-sen^2\ t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \end{array}\right\} sen\ 2\ t = 2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$$

$$\int \sqrt{9-x^2}\ dx = \frac{9}{2}\left(arc\ sen\frac{x}{3}+\frac{1}{2}2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)+C =$$
$$= \frac{9}{2}\left(arc\ sen\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)+C$$

② Hallar $\int \sqrt{8-x^2}\ dx$

Resolución:

- En este caso se aplicará directamente el resultado al que se llegó:

$$\int \sqrt{8-x^2}\,dx = 4\left(arc\ sen\frac{x}{\sqrt{8}} + \frac{x}{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8}}\right) + C$$