Álgebra, rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. Un número multiplicado por sí mismo se denomina *cuadrado,* y se representa con el superíndice 2. Por ejemplo, la notación de 3×3 es 3^2; de la misma manera, $a \times a$ es igual que a^2.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

Historia

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones *lineales* ($ax = b$) y *cuadráticas* ($ax^2 + bx = c$), así como *ecuaciones indeterminadas* como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan. También fueron capaces de resolver algunas ecuaciones indeterminadas.

Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro *Las aritméticas* de Diofante es de bastante más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó “ciencia de reducción y equilibrio”. (La palabra árabe *al-jabru* que significa ‘reducción’, es el origen de la palabra *álgebra*). En el siglo IX, el matemático al-Jwarizmì; escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar las *x, y, z* que cumplen $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$, y $xz = y^2$.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita *x,* y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Este álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del *Álgebra* de al-Jwarizmì fue publicada en el siglo XII. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

A principios del siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Niels Abel y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la *Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo (*véase* Número: *Números complejos*).

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones (*véase* Combinatoria) de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX. Los matemáticos franceses Galois y Augustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones a su estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas; mientras que los números complejos son de la forma $a + bi$, las cuaternas son de la forma $a + bi + cj + dk$.

Después del descubrimiento de Hamilton el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna —también llamada álgebra abstracta— ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

Símbolos y términos específicos

Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables.

Operaciones y agrupación de símbolos

La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basa en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo:

$$\frac{ax+b}{c-dy} \qquad \sqrt{b^2-4ac}$$

Los símbolos de las operaciones básicas son bien conocidos de la aritmética: adición (+), sustracción (-), multiplicación (×) y división (:). En el caso de la multiplicación, el signo '×' normalmente se omite o se sustituye por un punto, como en $a \cdot b$. Un grupo de símbolos contiguos, como *abc,* representa el producto de *a, b* y *c.* La división se indica normalmente mediante rayas horizontales. Una raya oblicua, o virgulilla, también se usa para separar el numerador, a la izquierda de la raya, del denominador, a la derecha, en las fracciones. Hay que tener cuidado de agrupar los términos apropiadamente. Por ejemplo, $ax + b/c - dy$ indica que ax y dy son términos separados, lo mismo que b/c, mientras que $(ax + b)/(c - dy)$ representa la fracción:

$$\frac{ax+b}{c-dy}$$

Prioridad de las operaciones

Primero se hacen las multiplicaciones, después las divisiones, seguidas de las sumas y las restas. Los símbolos de agrupación indican el orden en que se han de realizar las operaciones: se hacen primero todas las operaciones dentro de un mismo grupo, comenzando por el más interno. Por ejemplo:

$$\left\{2\left[3+(6\cdot 5+2)\right]\right\} = \left\{2\left[3+(30+2)\right]\right\} =$$
$$\left\{2\left[3+(32)\right]\right\} = \left\{2\left[35\right]\right\} = 70$$

Otras definiciones

Cualquier expresión que incluya la relación de igualdad (=) se llama *ecuación.* Una ecuación se denomina *identidad* si la igualdad se cumple para cualquier valor de las variables; si la ecuación se cumple para ciertos valores de las variables pero no para otros, la ecuación es *condicional.* Un *término* es una expresión algebraica que sólo contiene productos de constantes y variables; $2x$, $-a$, $\frac{1}{4}s^4x$, $x^2(2zy)^3$ son algunos ejemplos de términos. La parte numérica de un término se denomina *coeficiente.* Los coeficientes de cada uno de los ejemplos anteriores son 2, -1, $\frac{1}{4}$ y 8 (el último término se puede escribir como $8x^2(zy)^3$).

Una expresión que contiene un solo término se denomina *monomio,* dos términos, *binomio* y tres términos, *trinomio.* Un *polinomio* es una suma (o diferencia) finita de términos. Por ejemplo, un polinomio de *n*-ésimo grado en su forma general se expresa como:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + . \; . \; . + a_1 x + a_0$$

En este contexto, el *grado* es el mayor exponente de las variables en un polinomio. Por ejemplo, si el mayor exponente de la variable es 3, como en $ax^3 + bx^2 + cx$, el polinomio es de tercer grado. Del mismo modo, la expresión $x^n + x^{n-1} + x^{n-2}$ es de *n*-ésimo grado.

Una *ecuación lineal* en una variable es una ecuación polinómica de primer grado, es decir, una ecuación de la forma $ax + b = 0$. Se les llama ecuaciones lineales porque representan la fórmula de una línea recta en la geometría analítica.

Una *ecuación cuadrática* en una variable es una ecuación polinómica de segundo grado, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Un *número primo* es un entero (número natural) que sólo se puede dividir exactamente por sí mismo y por 1. Así, 2, 3, 5, 7, 11 y 13 son todos números primos.

Las *potencias* de un número se obtienen mediante sucesivas multiplicaciones del número por sí mismo. El término *a* elevado a la tercera potencia, por ejemplo, se puede expresar como $a \cdot a \cdot a$ o a^3.

Los *factores primos* de un cierto número son aquellos factores en los que éste se puede descomponer de manera que el número se puede expresar sólo como el producto de números primos y sus potencias. Por ejemplo, los factores primos de 15 son 3 y 5. Del mismo modo, como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, los factores primos de 60 son 2, 3 y 5.

Operaciones con polinomios

Al hacer operaciones con polinomios, se asume que se cumplen las mismas propiedades que para la aritmética numérica. En aritmética, los números usados son el conjunto de los números racionales. La aritmética, por sí sola, no puede ir más lejos, pero el álgebra y la geometría pueden incluir números irracionales, como la raíz cuadrada de 2 y números complejos. El conjunto de todos los números racionales e irracionales constituye el conjunto de los números reales.

Propiedades de la adición

A1. La suma de dos números reales *a* y *b* cualesquiera es otro número real que se escribe $a + b$. Los números reales son uniformes para las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división; esto quiere decir que al realizar una de estas operaciones con números reales el resultado es otro número real.

A2. Cualquiera que sea la forma en que se agrupan los términos de la adición, el resultado de la suma es siempre el mismo: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es la llamada *propiedad asociativa de la adición.*

A3. Dado un número real *a* cualquiera, existe el número real cero (0) conocido como *elemento neutro de la adición,* tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

A4. Dado un número real *a* cualquiera, existe otro número real ($-a$), llamado *elemento simétrico* de *a* (o elemento recíproco de la suma), tal que $a + (-a) = 0$.

A5. Cualquiera que sea el orden en que se realiza la adición, la suma es siempre la misma: $a + b = b + a$. Es la llamada *propiedad conmutativa de la adición.*

Cualquier conjunto de números que cumpla las cuatro primeras propiedades se dice que forma un *grupo*. Si además el conjunto cumple A5, se dice que es un grupo *abeliano* o *conmutativo.*

Propiedades de la multiplicación

Para la multiplicación se cumplen propiedades similares a las de la adición. Sin embargo, hay que prestar especial atención a los elementos neutro y recíproco, M3 y M4.

M1. El producto de dos números reales a y b es otro número real, que se escribe $a \cdot b$ o ab.

M2. Cualquiera que sea la forma de agrupar los términos de la multiplicación, el producto es siempre el mismo: $(ab)c = a(bc)$. Es la llamada *propiedad asociativa de la multiplicación.*

M3. Dado un número real a cualquiera, existe el número real uno (1) llamado *elemento neutro de la multiplicación,* tal que $a(1) = 1(a) = a$.

M4. Dado un número real a distinto de cero, existe otro número (a^{-1} o $1/a$), llamado *elemento inverso* (o elemento recíproco de la multiplicación), para el que $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = 1$.

M5. Cualquiera que sea el orden en que se realiza la multiplicación, el producto es siempre el mismo: $ab = ba$. Es la llamada *propiedad conmutativa de la multiplicación.*

Un conjunto de elementos que cumpla estas cinco propiedades se dice que es un grupo *abeliano,* o *conmutativo,* para la multiplicación. El conjunto de los números reales, excluyendo el cero —pues la división por cero no está definida— es un grupo conmutativo para la multiplicación.

Propiedad distributiva

Otra propiedad importante del conjunto de los números reales relaciona la adición y la multiplicación de la forma siguiente:

D1. $a(b + c) = ab + ac$

D2. $(b + c)a = ba + ca$

Un conjunto de elementos con una relación de igualdad, en el que se definen dos operaciones (como la adición y la multiplicación) que cumplan las propiedades de la adición, A1 a A5, las propiedades de la multiplicación, M1 a M5, y la propiedad distributiva, D1 y D2, constituye un cuerpo conmutativo.

Multiplicación de polinomios

El siguiente ejemplo es el producto de un monomio por un binomio:

$$(ax + b)(cx^2) = acx^3 + bcx^2$$

Este mismo principio —multiplicar cada término del primer polinomio por cada uno del segundo— se puede ampliar directamente a polinomios con cualquier número de términos. Por ejemplo, el producto de un binomio y un trinomio se hace de la siguiente manera:

$$(ax^3 + bx^2 - cx)(dx + e) = adx^4 + aex^3 + bdx^3 + bex^2 - cdx^2 - cex$$

Una vez hechas estas operaciones, todos los términos de un mismo grado se han de agrupar, siempre que sea posible, para simplificar la expresión:

$$= adx^4 + (ae + bd)x^3 + (be - cd)x^2 - cex$$

Factorización de polinomios

Dada una expresión algebraica complicada, resulta útil, por lo general, el descomponerla en un producto de varios términos más sencillos. Por ejemplo, $2x^3 + 8x^2y$ se puede factorizar, o reescribir, como $2x^2(x + 4y)$. El encontrar los factores de un determinado polinomio puede ser materia de simple inspección o se puede necesitar el uso de tanteos sucesivos. Ciertos polinomios, sin embargo, no se pueden factorizar utilizando coeficientes reales y son llamados *polinomios primos.*

Algunas factorizaciones conocidas aparecen en los ejemplos siguientes.

Trinomios de la forma:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y) = (x - y)^2$$
$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2$$

Diferencia de cuadrados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$25x^2 - 16y^2 = (5x + 4y)(5x - 4y)$$

Trinomios de la forma:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

Sumas y diferencias de cubos:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
$$x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Para factorizar suele ser útil agrupar primero; aquellos términos que sean similares se agrupan como en el siguiente ejemplo, cuando sea posible:

$$2x^2z + x^2y - 6xz - 3xy = x^2(2z + y) -$$
$$3x(2z + y) =$$
$$(x^2 - 3x)(2z + y) =$$
$$x(x - 3)(2z + y)$$

Máximo común divisor

Dado un polinomio, suele ser importante determinar el mayor factor común a todos los términos del polinomio. Por ejemplo, en la expresión $9x^3 + 18x^2$, el número 9 es un factor de ambos términos, lo mismo que x^2. Tras su factorización se obtiene $9x^2(x + 2)$, y $9x^2$ es el máximo común divisor de todos los términos del polinomio original (en este caso un binomio). De la misma manera, en el trinomio $6a^2x^3 + 9abx + 15cx^2$, el número 3 es el mayor submúltiplo común a 6, 9 y

15, y x es el mayor factor de la variable común a los tres términos. Por tanto, el máximo común divisor del trinomio es $3x$.

Mínimo común múltiplo

Encontrar el mínimo común múltiplo es útil para poder hacer ciertas operaciones con fracciones algebraicas. El procedimiento es similar al usado para realizar estas operaciones con fracciones ordinarias en aritmética. Para poder combinar dos o más fracciones, los denominadores deben ser iguales; la forma más directa de obtener un denominador común es multiplicar todos los denominadores entre sí. Por ejemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Pero puede ocurrir que *bd* no sea el *mínimo* común denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{12+3}{18}=\frac{15}{18}$$

Sin embargo, 18 es sólo uno de los posibles denominadores comunes; el mínimo común denominador es 6:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

En álgebra, el problema de encontrar el mínimo común múltiplo es similar. Dadas varias expresiones, su mínimo común múltiplo es aquella expresión con el menor grado y los menores coeficientes que se puede dividir exactamente por cada una de ellas. Así, para encontrar un múltiplo común a los términos $2x^2y$, $30x^2y^2$, $9ay^3$, basta con multiplicar las tres expresiones entre sí y es fácil demostrar que $(2x^2y)(30x^2y^2)(9ay^3)$ se puede dividir exactamente por cada uno de los tres términos; sin embargo, éste no es el menor de los múltiplos comunes. Para determinar cuál es el mínimo, cada uno de los términos se ha de descomponer en sus factores primos. Para los coeficientes numéricos, 2, 30 y 9, los factores primos son 2, 2·3·5 y 3·3 respectivamente; el mínimo común múltiplo de los coeficientes debe ser por tanto 2·3·3·5, o 90, que es el producto de la mínima cantidad de factores necesaria para obtener un múltiplo común. De la misma manera, como la constante a sólo aparece una vez, debe ser un factor. En cuanto a las variables, se necesitan x^2 e y^3; por tanto, el mínimo común múltiplo de los tres términos es $90ax^2y^3$. Esta expresión se puede dividir exactamente por cada uno de los términos.

Resolución de ecuaciones

Dada una ecuación, el álgebra se ocupa de encontrar sus soluciones siguiendo el concepto general de identidad $a = a$. Siempre que se apliquen las mismas operaciones aritméticas o algebraicas en ambos lados de la ecuación la igualdad se mantiene inalterada. La estrategia básica es despejar la incógnita en un lado de la igualdad y la solución será el otro lado. Por ejemplo, para resolver la siguiente ecuación lineal con una incógnita

$$5x + 6 = 3x + 12$$

los términos que contienen la variable se despejan en un lado y las constantes en el otro. El término $3x$ se puede eliminar del lado derecho mediante sustracción; $3x$ se ha de restar del lado izquierdo al mismo tiempo:

$$\begin{array}{rr} 5x+6= & 3x+12 \\ -3x & -3x \\ \hline 2x+6= & 12 \end{array}$$

Después se resta el número 6 de ambos lados:

$$\begin{array}{rcr} 2x+6= & & 12 \\ -6 & & -6 \\ \hline 2x & = & 6 \end{array}$$

Para despejar la *x* en el lado izquierdo se dividen ambos lados de la ecuación por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

y la solución es por tanto: *x* = 3. Para comprobar este resultado basta con sustituir el valor *x* = 3 en la ecuación original:

$$\begin{aligned} 5x + 6 &= 3x + 12 \\ 5(3) + 6 &= 3(3) + 12 \\ 15 + 6 &= 9 + 12 \\ 21 &= 21 \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Dada una ecuación de segundo grado o cuadrática en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hay diversas posibilidades para resolverla dependiendo de la naturaleza específica de la ecuación en cuestión. Si la ecuación se puede factorizar, la solución es inmediata. Por ejemplo:

$$x^2 - 3x = 10$$

Primero se escribe la ecuación en su forma general

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

que se puede factorizar como:

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

La igualdad sólo se cumple cuando uno de los factores es cero, es decir, cuando *x* = 5 o *x* = -2. Éstas son las soluciones de la ecuación, que de nuevo se pueden verificar mediante sustitución.

Si a primera vista no se encuentra un modo directo de factorizar la ecuación, puede existir otra alternativa. Por ejemplo, en la ecuación

$$4x^2 + 12x = 7$$

la expresión $4x^2 + 12x$ se podría factorizar como un cuadrado perfecto si fuera $4x^2 + 12x + 9$, que equivale a $(2x + 3)^2$. Esto se puede conseguir fácilmente sumando 9 al lado izquierdo de la ecuación. La misma cantidad debe sumarse, por supuesto, al lado derecho:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 9 &= 7 + 9 \\ (2x + 3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

que se reduce a

$$2x + 3 = \sqrt{16}$$

o

$$2x + 3 = +4$$

y

$$2x + 3 = -4$$

pues $\sqrt{16}$ tiene dos valores. La primera ecuación da la solución $x = \frac{1}{2}$ (restando 3 de ambos lados: $2x = 1$, y dividiendo ambos lados por 2: $x = \frac{1}{2}$). La segunda ecuación da $x = -7/2$. Ambas soluciones se pueden verificar como antes, sustituyendo los valores en cuestión en la ecuación original. Esta forma de resolución se suele denominar método del cuadrado perfecto.

En general, cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se puede resolver utilizando la *fórmula cuadrática.* Para cualquier ecuación de este tipo las dos soluciones de *x* están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, para encontrar las raíces de

$$x^2 - 4x = -3$$

primero se pone la ecuación en su forma general:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Por tanto, $a = 1$, $b = -4$ y $c = 3$. Estos valores se sustituyen en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3 \quad y \quad 1$$

Sistemas de ecuaciones

En álgebra, lo normal es que haya que resolver no una sino varias ecuaciones al mismo tiempo. El problema es encontrar el conjunto de todas las soluciones que cumplen todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de ecuaciones que deben resolverse se denomina *sistema de ecuaciones* y para resolverlo se pueden usar técnicas específicas del álgebra. Por ejemplo, dadas las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$3x + 4y = 10 \qquad (1)$$
$$2x + y = 5 \qquad (2)$$

hay un sistema sencillo: la variable *y* se despeja en la ecuación (2) dando $y = 5 - 2x$; este valor de *y* se sustituye en la ecuación (1):

$$3x + 4\,(5 - 2x) = 10$$

Así el problema se reduce a una ecuación lineal con una sola incógnita *x,* obteniéndose

$$3x + 20 - 8x = 10$$

o

$$-5x = -10$$

de donde

$x = 2$

Si este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales (1) o (2), se obtiene que

$y = 1$

Otro método más rápido para resolver un sistema de ecuaciones es, en este caso, multiplicar ambos lados de la ecuación (2) por 4, con lo que queda:

$$3x + 4y = 10 \qquad (1)$$
$$8x + 4y = 20 \qquad (2)$$

Si ahora se resta la ecuación (1) de la (2), entonces 5x = 10, o x = 2. Este procedimiento genera otro avance en las matemáticas, las matrices. La teoría de matrices nos ayuda a obtener soluciones para cualquier conjunto de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas.

TEORÍA DE MATRICES Y ÁLGEBRA LINEAL

Ramas de las matemáticas, relacionadas entre sí, que son herramientas fundamentales en las matemáticas puras y aplicadas, y cada vez más importantes en las ciencias físicas, biológicas y sociales.

Teoría de matrices

Una matriz es una tabla rectangular de números o elementos de un anillo (*véase* Álgebra). Una de las principales aplicaciones de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Cada fila de la matriz representa una ecuación, siendo los valores de una fila los coeficientes de las distintas variables de la ecuación, en determinado orden.

Una matriz se representa normalmente entre paréntesis o corchetes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 15 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \end{pmatrix}$$

En las matrices anteriores, *a, b* y *c* son números cualesquiera. Para delimitar la matriz, en vez de corchetes, se pueden utilizar también dos rectas paralelas a cada lado. Las líneas horizontales, denominadas filas, se numeran de arriba a abajo; las líneas verticales, o columnas, se numeran de izquierda a derecha. Utilizando esta notación, el elemento de la segunda fila y tercera columna de M_1 es -1. Una fila o columna genérica se denomina línea.

El tamaño de una matriz está dado por el número de filas y el de columnas en este orden, así M_1, M_2, M_3 y M_4 son de tamaño 3 × 3 (3 por 3), 3 × 3, 3 × 2 y 2 × 3 respectivamente. Los elementos de una matriz general de tamaño $m \times n$ se representan normalmente utilizando un doble subíndice; el primer subíndice, *i,* indica el número de fila y el segundo, *j,* el número de columna. Así pues, el elemento a_{23} está en la segunda fila, tercera columna. La matriz general

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se puede representar de forma abreviada como $A = (a_{ij})$, en donde los posibles valores de los índices $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ se han de dar explícitamente si no se sobrentienden. Si $m = n$, la matriz es cuadrada y el número de filas (o columnas) es el orden de la matriz. Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son iguales si y sólo si son de igual tamaño y si para todo i y j, $a_{ij} = b_{ij}$. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, … forman la diagonal principal de la matriz. La matriz traspuesta A^T de una matriz A es otra matriz en la cual la fila i es la columna i de A, y la columna j es la fila j de A. Por ejemplo, tomando la matriz M_3 anterior,

$$M_5 = M_3^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ 0 & -\frac{1}{2} & b \end{pmatrix}$$

es la matriz traspuesta de M_3.

La adición y la multiplicación de matrices están definidas de manera que ciertos conjuntos de matrices forman sistemas algebraicos. Consideremos los elementos de las matrices números reales cualesquiera, aunque se podrían tomar elementos de cualquier otro cuerpo o anillo. La matriz cero es aquélla en la que todos los elementos son 0; la matriz identidad I_m de orden m, es una matriz cuadrada de orden m en la cual todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que son 1. El orden de la matriz identidad se puede omitir si se sobrentiende con el resto de la expresión, con lo que I_m se escribe simplemente I.

La suma de dos matrices sólo está definida si ambas tienen el mismo tamaño. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ tienen igual tamaño, entonces la suma $C = A + B$ se define como la matriz (c_{ij}), en la que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, es decir, para sumar dos matrices de igual tamaño basta con sumar los elementos correspondientes. Así, para las matrices mencionadas anteriormente

$$M_4 + M_5 = \begin{pmatrix} a+b-2 & b+c+1 & c+2a \\ a-b & b-c-\frac{1}{2} & c-a+b \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices de un determinado tamaño tiene las propiedades uniforme, asociativa y conmutativa de la adición. Además hay una matriz única O tal que para cualquier matriz A, se cumple $A + O = O + A = A$ y una matriz única B tal que $A + B = B + A = O$.

El producto AB de dos matrices, A y B, está definido sólo si el número de columnas del factor izquierdo, A es igual al número de filas del factor derecho, B; si $A = (a_{ij})$ es de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ es de tamaño $n \times p$, el producto $AB = C = (c_{ik})$ es de tamaño $m \times p$, y c_{ik} está dado por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

es decir, el elemento de la fila i y la columna k del producto es la suma de los productos de cada uno de los elementos de la fila i del factor izquierdo multiplicado por el correspondiente elemento de la columna k del factor derecho.

Álgebra lineal

El concepto geométrico de vector como segmento rectilíneo de longitud, dirección y sentido dados, puede generalizarse como se muestra a continuación. Un *n*-vector (vector *n*-dimensional, vector de orden *n* o vector de longitud *n*) es un conjunto ordenado de *n* elementos de un cuerpo. Al igual que en la teoría de matrices, los elementos de un vector pueden ser números reales. Un *n*-vector **v** se representa como

$\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Las líneas de una matriz son vectores: las horizontales son vectores fila y las verticales vectores columna. Las *x* se denominan componentes del vector.

La suma de vectores (de igual longitud) y la multiplicación por un escalar se definen de igual manera que para las matrices, y cumplen las mismas propiedades. Si

$\boldsymbol{w} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

y *k* es un escalar (número real), entonces

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

y

$k\boldsymbol{v} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$

Si $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son escalares, y $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ son *n*-vectores, el *n*-vector

$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{v}_m$

se denomina combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Los *m* *n*-vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal igual al *n*-vector cero, **0** = (0,0, …, 0), es aquélla en que $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Si existe otra combinación lineal que cumple esto, los vectores son linealmente dependientes. Por ejemplo, si $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 2, 4, 4)$ y $\boldsymbol{v}_4 = (3, 4, 7, 8)$, entonces $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son linealmente independientes, pues $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = 0$ si y sólo si $k_1 = k_2 = k_3 = 0$; $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$son linealmente dependientes pues $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = 0$. Si *A* es una matriz de *rango r,* entonces al menos un conjunto de *r* vectores fila o columna es un conjunto linealmente independiente, y todo conjunto con más de *r* vectores fila o columna es un conjunto linealmente dependiente.

Un espacio vectorial ***V*** es un conjunto no vacío de vectores (*véase* Teoría de conjuntos) que cumple las siguientes propiedades: (1) si $\boldsymbol{v} \varepsilon \boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{w} \varepsilon \boldsymbol{V}$, entonces $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \varepsilon \boldsymbol{V}$, y (2) si $\boldsymbol{v} \varepsilon \boldsymbol{V}$ y *k* es un escalar cualquiera, entonces $k\boldsymbol{v} \varepsilon \boldsymbol{V}$. Si $S = \{\boldsymbol{v}_i\}$ es un conjunto de vectores, todos ellos de la misma longitud, todas las combinaciones lineales de los vectores ***v*** forman un espacio vectorial ***V***. Se dice que este espacio vectorial es generado por los ***v***. Si el conjunto $B = \{\boldsymbol{w}_1\}$ genera el mismo espacio vectorial ***V***, y está formado por vectores linealmente independientes, se dice que *B* es una base de ***V***. Si una base de ***V*** contiene *m* vectores, entonces toda base de ***V*** contiene exactamente *m* vectores, y se dice que **V** es un espacio vectorial de dimensión *m.* Los espacios euclídeos de dos y tres dimensiones se pueden representar por parejas y tríos ordenados de números reales. Las matrices se pueden utilizar para describir transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro.