

# LÍMITES , CONTINUIDAD Y DERIVADAS

## ÍNDICE

1. Concepto de límite
2. Propiedades de los límites
3. Definición de continuidad
4. Tipos de continuidad
5. Concepto de derivada
6. Tabla de derivadas
7. Crecimiento y decrecimiento
8. Máximos y mínimos
9. Concavidad y convexidad
10. Puntos de inflexión
11. Representación gráfica de funciones

**Idea de límite de una función en un punto :** Sea la función  $y = x^2$  . Si  $x$  tiende a 2 a qué valor se aproxima  $y$  :

$x \rightarrow 2^-$	1'8	1'9	1'99	1'999
$y \rightarrow$	3'24	3'61	3'9601	3'996001

$x \rightarrow 2^+$	2'2	2'1	2'01	2'001
$y \rightarrow$	4'84	4'41	4'0401	4'004001

Luego cuando  $x$  se aproxima a 2 , tanto por la derecha como por la izquierda los valores de  $y$  se acercan cada vez más a 4 . Esta idea se suele expresar así :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \quad (\text{límite lateral por la izquierda})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \quad (\text{límite lateral por la derecha})$$

**Cuando el límite por la derecha y por la izquierda existen y son iguales se dice que existe límite en ese punto y es :**

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Si los límites laterales en  $x = x_0$  son distintos entonces  $f$  no tiene límite en ese punto .

**Definición intuitiva de límite :** dada una función  $f$  , el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es el valor al que se aproximan las imágenes mediante  $f$  de los puntos  $x$  cuando éstos se aproximan al valor de  $x_0$  .

**Definición matemática de límite :** una función  $f$  tiene límite  $l$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  si es posible conseguir que  $f(x)$  esté tan próximo a  $l$  como se quiera al tomar  $x$  suficientemente próximo a  $x_0$  ( tanto como sea necesario ) pero siendo  $x \neq x_0$  .

Decir que " $f(x)$  se aproxima a  $l$  tanto como se quiera" equivale a decir que la distancia de  $f(x)$  a  $l$  es menor que cualquier valor  $\epsilon$  por pequeño que este sea , es decir  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Decir que "la variable  $x$  toma valores suficientemente próximos a  $x_0$ " equivale a decir que dependiendo de la proximidad de  $f(x)$  a  $l$  , así deberá estar más o menos próximo  $x$  a  $x_0$  para que se cumpla la hipótesis  $|f(x) - l| < \epsilon$  , es decir , debe de existir un  $\delta$  tal que  $|x - x_0| < \delta$  .

Por lo tanto se dice que una función  $f(x)$  tiene límite  $l$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  , si para cualquiera que sea el número  $\epsilon$  se puede encontrar otro número  $\delta$  tal que  $|f(x) - l| < \epsilon$  para todo  $x$  que verifique  $|x - x_0| < \delta$

Utilizando la notación matemática :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta \text{ si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \exists \varepsilon^*(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) / \forall x \in \varepsilon^*(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(l)$$

Observemos que la función no tiene por qué estar definida en  $x_0$  para tener límite en ese punto , incluso aunque esté definida no es necesario que sea igual al límite .

No obstante si  $f(x)$  está definida en  $x_0$  y  $f(x_0) = l$  entonces se dice que la función es continua en  $x_0$  .

*Ejemplo :* Veamos que  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$

Tomamos  $\varepsilon = 0.1$  , es decir , la distancia entre  $f(x)$  y el límite 6 es menor que 0.1 ,  
 $|f(x) - 6| < 0.1$  por lo tanto  $|2x - 6| < 0.1$  ,  $-0.1 < 2x - 6 < 0.1$  ,  $5.9 < 2x < 6.1$  ,  $2.95 < x < 3.05$  ,  
 $3 - 0.05 < x < 3 + 0.05$  ,  $|x - 3| < 0.05$  luego debemos tomar  $\delta = 0.05$

Podríamos tomar un  $\varepsilon$  todo lo pequeño que nosotros queramos , y siempre encontraríamos un  $\delta$  .

En general :  $|f(x) - 6| < \varepsilon$  por lo tanto  $|2x - 6| < \varepsilon$  ,  $-\varepsilon < 2x - 6 < \varepsilon$  ,  $6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon$  ,

$3 - \varepsilon/2 < x < 3 + \varepsilon/2$  ,  $|x - 3| < \varepsilon/2$  luego debemos tomar  $\delta = \varepsilon/2$  , en general  $\delta$  depende del valor de  $\varepsilon$  que tomemos .

**Límites infinitos en un punto (asíntota vertical):** Se dice que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  si para

cualquier  $k$  positivo se puede encontrar un  $\delta$  tal que  $f(x) > k$  cuando  $|x - x_0| < \delta$  .

Se dice que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  si para cualquier  $k$  positivo se puede encontrar un  $\delta$  tal que

$f(x) < -k$  cuando  $|x - x_0| < \delta$  .

**Límites en el infinito (asíntota horizontal):** Se dice que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  si para cualquier

$\varepsilon$  se puede encontrar un  $k$  positivo tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para todo  $x > k$  .

Se dice que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  si para cualquier  $\varepsilon$  se puede encontrar un  $k$  positivo tal que

$|f(x) - l| < \varepsilon$  para todo  $x < -k$  .

**Límite infinito en el infinito :** Se dice que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si para cualquier  $k$  positivo

se puede encontrar un  $H$  positivo tal que  $f(x) > k$  para todo  $x > H$  .

Se dice que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si para cualquier  $k$  positivo se puede encontrar un  $H$

positivo tal que  $f(x) < -k$  para todo  $x > H$  .

Se dice que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si para cualquier  $k$  positivo se puede encontrar un  $H$

positivo tal que  $f(x) > k$  para todo  $x < -H$  .

Se dice que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si para cualquier  $k$  positivo se puede encontrar un  $H$

positivo tal que  $f(x) < -k$  para todo  $x < -H$  .

**Propiedades de los límites :**

1. El límite de una función en un punto si existe , es único y es igual a los límites laterales .
2. Si una función tiene límite distinto de cero en un punto entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma  $f$  tienen el mismo signo que el límite .

3.  $\lim f+g = \lim f + \lim g$
4.  $\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$
5.  $\lim k \cdot f = k \cdot \lim f$  donde k es un n° real
6.  $\lim f/g = \lim f / \lim g$  siempre que  $\lim g \neq 0$
7.  $\lim f^n = (\lim f)^n$  donde n es un n° real
8.  $\lim f^g = (\lim f)^g$
9.  $\lim g(f(x)) = g(\lim f(x))$

### Cálculo de algunos límites : ( Indeterminaciones )

Al aplicar las propiedades de los límites podemos encontrar una de las siguientes indeterminaciones :  $0/0$  ,  $\infty/\infty$  ,  $\infty - \infty$  ,  $0 \cdot \infty$  ,  $0^0$  ,  $\infty^0$  ,  $1^\infty$

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  es decir en los polinómios se sustituye el punto .
2.  $\lim P(x)/Q(x) = P(x_0)/Q(x_0)$  si  $Q(x_0) \neq 0$

Cuando  $Q(x_0) = 0$  se puede distinguir dos casos :

§ Que  $P(x_0) \neq 0$  . Tendremos que calcular los límites laterales , si existen y son iguales la función tendrá límite que será  $+\infty$  ó  $-\infty$  . En caso contrario no existirá límite .

§ Que  $P(x_0) = 0$  por lo que tendremos una indeterminación del tipo  $0/0$  que se resuelve factorizando numerador y denominador y simplificando la función racional . En el caso de que haya raíces debemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado .

3.  $\lim P(x)/Q(x) = \infty/\infty$  (indeterminación del tipo  $\infty/\infty$ ) entonces se divide por la

máxima potencia , tanto si las expresiones son racionales como si son radicales . En el caso más simple que es el de las funciones racionales podemos obtener los siguientes casos :

§ grado  $P(x) >$  grado  $Q(x) \longrightarrow \lim = +/- \infty$

§ grado  $P(x) =$  grado  $Q(x) \longrightarrow \lim = a_n/b_n$

§ grado  $P(x) <$  grado  $Q(x) \longrightarrow \lim = 0$

Puede ser de utilidad saber que se puede transformar la indeterminación  $0/0$  a

$$\infty/\infty \text{ o al revés , sin más que tener presente que : } \frac{P}{Q} = \frac{1/Q}{1/P}$$

4. Si al calcular el límite de la función aparece una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$  para eliminarla tendremos que distinguir dos casos :
  - § Si f es la diferencia de dos funciones racionales se efectúa dicha operación para conseguir estar en uno de los dos casos anteriores .
  - § Si f es la diferencia de dos funciones con raíces cuadradas multiplicaremos y dividiremos por el conjugado .
5. Si al calcular el límite de la función aparece una indeterminación del tipo  $1^\infty$  debemos tener en cuenta que :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e = 2.71828\dots$
6. La indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$  se reduce al tipo  $0/0$  ó  $\infty/\infty$  utilizando la igualdad

$$P \cdot Q = \frac{P}{1/Q} = \frac{Q}{1/P}$$

7. Las indeterminaciones del tipo  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^\infty$  se pueden resolver utilizando la propiedad :  $a^b = e^{b \cdot \ln a}$  con lo que se reducirá a una de las indeterminaciones ya estudiadas .

**Definición de continuidad :** se dice que una función es continua en un punto  $x_0$  si :

- Existe  $f(x_0)$
- Existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Son iguales

En forma matemática :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta / \text{si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Una función se dice que es continua en un intervalo si lo es en cada uno de sus puntos .

**Tipos de discontinuidades :**

- Discontinuidad evitable :** Existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  pero :

- § No existe  $f(x_0)$
- § Existe  $f(x_0)$  pero  $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- Discontinuidad inevitable :** No existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  :

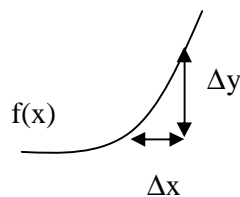
- § los límites laterales existen pero no son iguales : (**1ª especie**)
  - § **salto finito**
  - § **salto infinito**

- § alguno de los límites laterales no existe (**2ª especie**)

**Tasa de variación media (cociente incremental):** la tasa de variación de una función da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece la función en un determinado intervalo .

La tasa de variación media viene a responder a la pregunta : ¿ cuántas unidades crece la variable y por cada una que crece la x?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La tasa de variación media puede ser positiva , negativa o nula , dependiendo de la función y del intervalo .

**Tasa de variación instantánea (en un punto  $x_0$ ) :** es el límite de las tasas de variación media cuando los intervalos de la variable independiente se hacen cada vez más pequeños .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Concepto de derivada en un punto  $x_0$**  : Se llama derivada de la función  $f$  en el punto  $x = x_0$  al siguiente límite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Es decir , la derivada es la tasa de variación instantánea .

Si el límite existe se dice que la función es derivable en ese punto .

Por ejemplo vamos a calcular la derivada de  $y = x^2 + 8$  en el punto  $x_0 = 2$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x_0 + h)^2 + 8] - [2x_0^2 + 8]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + 4x_0}{h} = 4x_0 = 8$$

**Interpretación geométrica de la derivada** : la derivada es la pendiente  $m$  de la recta tangente en ese punto .Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a ese punto será :

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Derivadas laterales** : deben de existir y ser iguales para que exista la derivada

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Derivadas sucesivas** : si una función es derivable en cada punto de un intervalo se puede definir una nueva función asignando a cada punto  $x_0$  de ese intervalo la derivada  $f'(x_0)$  en dicho punto . Esta función se llama función derivada de  $f = f'(x)$  en un intervalo .

Si la función derivada de  $f$  es derivable en todos los puntos de un intervalo , su derivada

$$\text{se llama derivada segunda } f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

En general podemos obtener la derivada enésima .

**Teorema** : Si una función admite derivada finita en un punto  $x_0$  , entonces es continua en ese punto . **DERIVABLE  $\supset$  CONTINUA**

Lo contrario no tiene por qué ser cierto . Por ejemplo la función valor absoluto es continua en el punto 0 pero no es derivable

**Operaciones con derivadas** : se pueden deducir a partir de la definición de límite y derivada .

$(f+g)' = f' + g'$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

**Derivadas de las funciones elementales :**

<b>y</b>	<b>y'</b>	<b>y</b>	<b>y'</b>
<b>k</b>	<b>0</b>		
<b>x</b>	<b>1</b>		
<b>x<sup>n</sup></b>	<b>nx<sup>n-1</sup></b>	<b>u<sup>n</sup></b>	<b>nu<sup>n-1</sup>u'</b>
<b>a<sup>x</sup></b>	<b>a<sup>x</sup>lna</b>	<b>a<sup>u</sup></b>	<b>a<sup>u</sup>·lna·u'</b>
<b>e<sup>x</sup></b>	<b>e<sup>x</sup></b>	<b>e<sup>u</sup></b>	<b>e<sup>u</sup>·u'</b>
<b>u<sup>v</sup></b>	<b>v·u<sup>v-1</sup>·u'+u<sup>v</sup>·lnu·v'</b>		
<b>√x</b>	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	<b>√u</b>	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
<b><sup>n</sup>√x</b>	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	<b><sup>n</sup>√u</b>	$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
<b>log<sub>a</sub>x</b>	$\frac{1}{x} \log_a e$	<b>log<sub>a</sub>u</b>	$\frac{u'}{u} \log_a e$
<b>lnx</b>	$\frac{1}{x}$	<b>lnu</b>	$\frac{u'}{u}$
<b>senx</b>	<b>cosx</b>	<b>senu</b>	<b>cosu·u'</b>
<b>cosx</b>	<b>-senx</b>	<b>cosu</b>	<b>-senu·u'</b>
<b>tgx</b>	$\frac{1}{\cos^2 x}$	<b>tgu</b>	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
<b>cotgx</b>	$\frac{-1}{\sen^2 x}$	<b>cotgu</b>	$\frac{-u'}{\sen^2 u}$
<b>secx</b>	$\frac{\sen x}{\cos^2 x}$	<b>secu</b>	$\frac{senu}{\cos^2 u} u'$
<b>cosecx</b>	$\frac{-\cos x}{\sen^2 x}$	<b>cosecu</b>	$\frac{-\cos u}{\sen^2 u} u'$
<b>arc senx</b>	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	<b>arc senu</b>	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
<b>arc cosx</b>	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	<b>arc cosu</b>	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
<b>arc tgx</b>	$\frac{1}{1+x^2}$	<b>arc tgu</b>	$\frac{u'}{1+u^2}$
<b>arc cotgx</b>	$\frac{-1}{1+x^2}$	<b>arc cotgu</b>	$\frac{-u'}{1+u^2}$
<b>arc secx</b>	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	<b>arc secu</b>	$\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
<b>arc cosecx</b>	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	<b>arc cosecu</b>	$\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

**Crecimiento y decrecimiento de una función :**

§ Una función se dice que es creciente cuando al aumentar la x aumenta la y, es decir:

$$\text{creciente} \quad x_0-h < x_0 < x_0+h \quad \Rightarrow \quad f(x_0-h) \leq f(x_0) \leq f(x_0+h)$$

Al sustituir esto en la definición de derivada observamos que tanto para la derecha como para la izquierda :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Una función es creciente en un punto si la derivada es mayor o igual que cero .

§ Una función se dice que es decreciente cuando al aumentar la x disminuye la y ,es decir:

$$\text{decreciente} \quad x_0-h < x_0 < x_0+h \quad \Rightarrow \quad f(x_0-h) \geq f(x_0) \geq f(x_0+h)$$

Al sustituir esto en la definición de derivada observamos que tanto para la derecha como para la izquierda :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Una función es decreciente en un punto si la derivada es menor o igual que cero .

Si en las anteriores fórmulas cambiamos el mayor(menor) o igual que ... por mayor(menor) entonces obtenemos la definición de estrictamente creciente y decreciente .

### **Importante :**

creciente  $\Rightarrow$  la derivada en ese punto es positiva o igual que 0 . El contrario no es cierto ya que puede ocurrir que la derivada valga 0 y no sea creciente .

decreciente  $\Rightarrow$  la derivada en ese punto es negativa o igual que 0 . El contrario no es cierto ya que puede ocurrir que la derivada valga 0 y no sea decreciente .

Podría ocurrir que la derivada fuera 0 y no fuese creciente ni decreciente .

Por otro lado :

estrictamente creciente  $\Rightarrow$  la derivada en ese punto es positiva . El contrario si es cierto , es decir , si la derivada es positiva seguro que es estrictamente creciente .

estrictamente decreciente  $\Rightarrow$  la derivada en ese punto es negativa . El contrario si es cierto , es decir , si la derivada es negativa seguro que es estrictamente decreciente .

En resumen :

$f'(x_0) > 0$	estrictamente creciente
$f'(x_0) < 0$	estrictamente decreciente
$f'(x_0) = 0$	No se sabe

¿ Qué hacer en el caso de que la derivada sea cero ?

Podemos dar valores próximos al punto y ver lo que hace la función .

### **Máximos y mínimos de una función**

Se dice que una función tiene un máximo relativo en un punto  $x_0$  cuando existe un entorno del punto tal que se verifica que :  $f(x_0-h) < f(x_0) > f(x_0+h)$  . Es decir a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente .

Se dice que una función tiene un mínimo relativo en un punto  $x_0$  cuando existe un entorno del punto tal que se verifica que :  $f(x_0-h) > f(x_0) < f(x_0+h)$  . Es decir a la izquierda decreciente y a la derecha creciente .

La condición necesaria para que haya un máximo o un mínimo es que la derivada de la función en ese punto valga 0 . Esto es lógico pues si no sería estrictamente creciente o estrictamente decreciente .

En el caso del máximo si a la izquierda es creciente ( derivada primera positiva ) y a la derecha decreciente ( derivada primera negativa ) entonces :

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

Por la izquierda  $h < 0$  y  $f'(x_0 - h) > 0$  luego  $f''(x_0) < 0$

Por la derecha  $h > 0$  y  $f'(x_0 + h) < 0$  luego  $f''(x_0) < 0$

Por lo tanto cuando hay un máximo  $f''(x_0) < 0$

Si hacemos lo mismo para el mínimo obtendremos que la  $f''(x_0) > 0$

En resumen :

$f''(x_0) > 0$	Mínimo
$f''(x_0) < 0$	Máximo
$f''(x_0) = 0$	No se sabe

Pero ¿ que ocurre si  $f''(x_0) = 0$  ?

Puede que sea máximo , mínimo o ninguno de las dos .

Debemos de dar valores a la derecha y a la izquierda del punto y ver que hace la función , o podemos dar valores a la derecha y a la izquierda del punto para ver que hace la derivada de la función .

### **Concavidad y convexidad :**

Se dice que una función es cóncava en un punto cuando la función derivada en un entorno de ese punto es creciente es decir :

Una función se dice que es cóncava cuando al aumentar la x aumenta la y' ,es decir:

$$x_0 - h < x_0 < x_0 + h \quad \Rightarrow \quad f'(x_0 - h) \leq f'(x_0) \leq f'(x_0 + h)$$

Si sustituimos en la definición de derivada segunda obtenemos para la derecha e izquierda que :

$$\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \geq 0$$

Por lo tanto si la función es cóncava la derivada segunda es mayor o igual que cero .

Lo contrario no tiene por qué ser cierto .

Una función se dice que es convexa cuando al aumentar la x disminuye la y' ,es decir:

$$x_0 - h < x_0 < x_0 + h \quad \Rightarrow \quad f'(x_0 - h) \geq f'(x_0) \geq f'(x_0 + h)$$

Si sustituimos en la definición de derivada segunda obtenemos para la derecha e izquierda que :

$$\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \leq 0$$

Por lo tanto si la función es convexa la derivada segunda es menor o igual que cero

Lo contrario no tiene por qué ser cierto .

Como ocurría con el crecimiento y decrecimiento , si la derivada segunda es positiva seguro que es cóncava , si es negativa seguro que es convexa pero si es 0 no se puede afirmar en principio nada .

$f''(x_0) > 0$  Cóncava  
 $f''(x_0) < 0$  Convexa  
 $f''(x_0) = 0$  No se sabe

¿ Qué hacer si la derivada segunda es 0 ? Pues debemos de estudiar en los alrededores del punto a ver que es lo que hace la derivada primera .

**Punto de inflexión :**

Se dice que tenemos un punto de inflexión cuando la función pasa de cóncava a convexa o al revés .

La condición necesaria para que haya un punto de inflexión es que la derivada segunda sea 0 . Esto es lógico pues si no sería cóncava o convexa .

Supongamos que por la izquierda es cóncava y por la derecha es convexa , entonces :

$$f'''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h)}{h}$$

Por la izquierda  $h < 0$  y  $f''(x_0 - h) > 0$  luego  $f'''(x_0) < 0$

Por la derecha  $h > 0$  y  $f''(x_0 + h) < 0$  luego  $f'''(x_0) < 0$

Por lo tanto  $f'''(x_0) < 0$

Si por la izquierda es convexa y por la derecha cóncava :

Por la izquierda  $h < 0$  y  $f''(x_0 - h) < 0$  luego  $f'''(x_0) > 0$

Por la derecha  $h > 0$  y  $f''(x_0 + h) > 0$  luego  $f'''(x_0) > 0$

Por lo tanto  $f'''(x_0) > 0$

En resumen si  $f'''(x_0) \neq 0$  hay un punto de inflexión ya que pasará de cóncava a convexa o al revés .

En resumen :

$f'''(x_0) \neq 0$  Punto de inflexión  
 $f'''(x_0) = 0$  No se sabe

Pero ¿ que ocurre si  $f'''(x_0) = 0$  ? Puede que sea punto de inflexión o no .

Para averiguarlo debemos ver como varía la derivada segunda en los alrededores del punto .

**Representación gráfica de funciones :**

1. Dominio
2. Puntos de corte con los ejes
3. Simetrías
4. Asíntotas
5. Crecimiento y decrecimiento
6. Máximos y mínimos
7. Concavidad y convexidad
8. Puntos de inflexión