NÚMEROS COMPLEJOS

1. NÚMEROS CONCRETOS

Un número complejo Z es un par ordenado de números reales (a,b) $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$

a=1ª componente o componente real
b=2ª componente o componente imaginaria

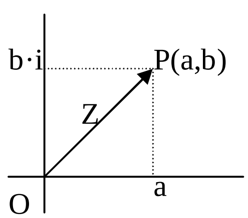
Z_1= (a,0) es un número real
Z_2= (0,b) es un número imaginario
Z_3=(a,b) es un número complejo

2. UNIDAD IMAGINARIA

La unidad imaginaria es $\sqrt{-1} = i$

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo Z=(a,b) se representa por un vector $\overrightarrow{OP}$ siendo P=(a,b)
El eje horizontal es el eje real. El eje vertical es el eje imaginario.



$$Z = (a,b) = a + b \cdot i = \overrightarrow{OP}$$

4. FORMAS DE EXPRESAR UN NÚMERO COMPLEJO

- Forma vectorial o par ordenado Z=(a,b)
- Forma binómica $Z = a + b \cdot i$
- Forma polar $Z = r_a$

  El módulo de un número complejo Z es r y es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la componente real y la componente imaginaria.

  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

  El argumento del número complejo Z es α y es el ángulo que forma el número complejo Z con el eje real (en sentido positivo).

  $Z = r_a$

- Forma trigonométrica o módulo argumental $Z = r(\cos a + i \cdot \operatorname{sen} a)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ / $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$

5. NÚMEROS CONJUGADOS Y OPUESTOS DE OTRO COMPLEJO

Dado un complejo $Z = a + b \cdot i$, su conjugado ($\overline{Z}$) tiene la misma parte real y opuesta la parte imaginaria.

$\overline{Z} = a - b \cdot i$

El complejo opuesto de $Z = a + b \cdot i$ es -Z y tiene opuestas las componentes real e imaginaria de Z.

$-Z = -a - b \cdot i$

6. POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^0 = 1$

$i^1 = i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

Cuando el exponente es superior a 4 se divide entre 4, igualando el enunciado a i elevado al resto de la división.

$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = \left(i^4\right)^c \cdot i^r = i^r$

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$$

7. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

a) En forma binómica

1. Suma

$Z_1 + Z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$

2. Resta

$Z_1 - Z_2 = (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a + c) - (b + d) \cdot i$

3. Producto

$Z_1 \cdot Z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (bc + ad) \cdot i$

4. Producto de un número real por un número complejo

$k \in \mathbb{R}$

$k \cdot Z_1 = k \cdot (a + b \cdot i) = K \cdot a + K \cdot b \cdot i$

5. Cociente

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=\frac{(a+b\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}{(c+d\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\cdot i}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\cdot i}{c^2+d^2}$$

6. Inverso de un número complejo

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{a+b\cdot i}=\frac{1\cdot(a-b\cdot i)}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\cdot i$$

7. Potencia de un complejo

$$Z_1^2=(a+b\cdot i)^2=a^2+(b\cdot i)^2+2a\cdot b\cdot i=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot i=(a^2-b^2)+2a\cdot b\cdot i$$

b) En forma polar

1. Producto de complejos

$$Z_1\cdot Z_2=(r_1)_{\alpha_1}\cdot(r_2)_{\alpha_2}=r_1\cdot r_{2_{\alpha_1+\alpha_2}}$$

2. Cociente de complejos

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(r_1)_{\alpha_1}}{(r_2)_{\alpha 2}}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$$

3. Potencia de un complejo

$$Z_1^n=(r_\alpha)^n=r^n$$

4. Radicación de un complejo

La raíz enésima de un complejo $Z=r_\alpha$ tiene por módulo la raíz enésima de su módulo. Su argumento es $\frac{\alpha+360°k}{n}$.

El número de raíces es n para k=0; k=1;…k=n-1.

$$\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r_\alpha}=\sqrt[n]{r_{\frac{\alpha+360k}{n}}}$$