CÁLCULO DE PROBABILIDADES :

- Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.
- Álgebra de sucesos.
- Frecuencias. Propiedades.
- Probabilidad. Resumen de Combinatoria.
- Probabilidad condicionada. Teoremas.

# PROBABILIDAD

Existen dos tipos de fenómenos:

- **deterministas**, que son aquellos cuyos resultados se pueden predecir de antemano, y
- estocásticos o **aleatorios**, que son los que dependen del azar (no se pueden predecir).

Se llama prueba al proceso mediante el cual se obtiene un resultado. Y se llama experimento aleatorio a todo fenómeno aleatorio.

Se llama **espacio muestral**, universo o población al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y se representa por **E**. Se llama **suceso aleatorio** a todo subconjunto del espacio muestral. Se llama **suceso elemental** a un suceso unitario. Se llama **espacio de sucesos** al conjunto formado por todos los sucesos, y se representa por $\Omega$. Se llama **suceso imposible** al que no se verificará nunca, y se representa por $\emptyset$. Se llama **suceso seguro** al que se verificará siempre, y se representa por **E**.

Se dice que un subconjunto A $\in$ $\Omega$ se ha realizado o se ha verificado cuando el resultado de la prueba coincide con algún componente del subconjunto A.

Se dice que un suceso A implica a otro B cuando siempre que se verifica A, se verifica B: A $\subseteq$ B. Diremos que dos sucesos son iguales cuando A $\subseteq$ B y B $\subseteq$ A.

## Álgebra de sucesos .-

$$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cup} \Omega$$
$$(A,\ B) \to A\cup B$$

A $\cup$ B es el suceso que se verifica si y sólo si se verifica uno de los dos.

$$\Omega\times\Omega \xrightarrow{\cap} \Omega$$
$$(A,\ B) \to A\cap B$$

A $\cap$ B es el suceso que se verifica cuando se verifican los dos a la vez.

$$\Omega \xrightarrow{C} \Omega$$
$$A \to A^C$$

$A^C$, complementario de $A$, es el suceso que se verifica cuando no se verifica $A$.

Propiedades:

Como las definiciones de unión, intersección y complementación de sucesos son idénticas a las de los conjuntos, estas operaciones para sucesos cumplen las mismas propiedades que para los conjuntos.

i) Conmutativa: $A\cup B = B\cup A$ $\qquad A\cap B = B\cap A$

ii) Asociativa: $A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ $\qquad A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

iii) Idempotente: $A\cup A = A$ $\qquad A\cap A = A$

iv) Simplificación: $A\cup (A\cup B) = A\cup B$ $\qquad A\cap (A\cap B) = A\cap B$

v) Distributiva: $A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$

$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$

vi) Existencia de elemento neutro: $A\cup \varnothing = A$ $\qquad A\cap E = A$

vii) Absorción: $A\cup E = E$ $\qquad A\cap \varnothing = \varnothing$

viii)Complementación: $E^{C} = \varnothing$ $\qquad \varnothing^{C} = E$

ix) Involución: $(A^{C})^{C} = A$

x) Leyes de Morgan: $(A\cup B)^{C} = A^{C} \cap B^{C}$ $\qquad (A\cap B)^{C} = A^{C} \cup B^{C}$

Álgebra de Boole:

Un conjunto dotado con dos leyes de composición (operaciones) que cumple la conmutatividad, distributividad, existencia de elemento neutro y existencia de complementario, se llama **álgebra de Boole**.

Así pues, $(\Omega ;\cup , \cap)$ es un álgebra de Boole.

Dos sucesos se dicen **incompatibles** si $A\cap B = \varnothing$.

Un **sistema completo de sucesos** son *n* sucesos $A_1, A_2, ......., A_n$ que verifican las dos siguientes condiciones:

i) $A_1 \cup A_2 \cup ......\cup A_n = E$

ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$ , $\forall$ $i, j$ = 1, 2, ...., n , $i\neq j$.

**Frecuencias .-**

Sea un suceso A $\in \Omega$. Si efectuamos $n$ pruebas de un experimento aleatorio, designaremos por $n_A$ el número de veces que se ha verificado el suceso A. El número $n_A$ se llama **frecuencia absoluta** del suceso A.

Se llama **frecuencia relativa** del suceso A al cociente entre la frecuencia absoluta y el número de pruebas: fr(A) = $n_A/n$ .

Como consecuencia de la propia definición, resultan las siguientes propiedades:

- fr( E ) = 1 y fr($\emptyset$) = 0

(debido a que $n_\emptyset = 0$ y $n_E = n$ )

- $\forall$ A$\in \Omega$, 0 $\le$ fr(A) $\le$ 1

(debido a que $0 \le n_A \le n$)

- Si A y B son dos sucesos incompatibles, fr(A$\cup$B) = fr(A) + fr(B)

(como A$\cap$B = $\emptyset$, será $n_{A\cup B} = n_A + n_B$ )

## Probabilidad .-

La idea intuitiva de probabilidad se basa en la llamada **ley de los grandes números,** enunciada por Bernoulli:

> "La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente".

Es decir, si A es un suceso, podríamos hablar del $\lim_{n\to\infty}$ fr(A) = $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$

Este número al que la frecuencia relativa se acerca es lo que llamaremos la **probabilidad** del suceso.

Se representará como **p(A)**.

Definición clásica de probabilidad:

(Regla de Laplace)

La probabilidad de un suceso A se calcula como el número de casos favorables al suceso A, partido por el número de casos posibles del experimento aleatorio:

$$p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Definición axiomática de probabilidad:

(Axiomas de Kolmogorov)

La probabilidad es una ley que asigna a cada suceso $A \in \Omega$ un número real

$$p : \Omega \to \Re \qquad \text{y que verifica:}$$
$$A \to p(A)$$

i) $p(A) \geq 0$, $\forall A \in \Omega$

ii) $p(E) = 1$

iii) si A y B son sucesos incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Como consecuencia de estos tres axiomas, se verifican además las siguientes propiedades:

iv) $p(A^C) = 1 - p(A)$

v) $p(\varnothing) = 0$

vi) si $A \subseteq B$, $\Rightarrow p(A) \leq p(B)$

vii) $p(A) \leq 1$, $\forall A \in \Omega$

viii)si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos, entonces

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots\ldots + p(A_n)$$

ix) si $A, B \in \Omega$ son dos sucesos cualesquiera, entonces

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

## Combinaciones, variaciones y permutaciones .-

Se llaman **variaciones** de $n$ elementos tomados de $m$ en $m$ a los grupos de $m$ elementos escogidos de los $n$ elementos de un conjunto, teniendo en cuenta que dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación de ellos.

Si los elementos se pueden repetir se llaman variaciones con repetición.

Si $m = n$ se llaman **permutaciones** de $n$ elementos.

Si el orden no importa se llaman **combinaciones**.

| | |
|---|---|
| **Variaciones**: $V_n^m = n\,(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-m+1)$ son los distintos grupos de $m$ elementos distintos que se pueden formar con $n$ elementos, teniendo en cuenta el orden. | **Variaciones con repetición**: $VR_n^m = n^m$ son los distintos grupos de $m$ elementos, repetidos o no, que se pueden formar con $n$ elementos, teniendo en cuenta el orden. |
| **Combinaciones**: $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ son los distintos subconjuntos de $m$ elementos distintos que se pueden formar | **Combinaciones con repet.**: $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$ son los distintos subconjuntos de $m$ elementos, repetidos o no, que se pueden formar con $n$ elementos. |

| | |
|---|---|
| con *n* elementos. | |
| **Permutaciones**: $P_n = V_n^n = n!$ son todas las distintas ordenaciones que se pueden formar con *n* elementos, todos distintos. | **Permut. con repet.**: $P_n^{a,b,\ldots k} = \dfrac{n!}{a!\, b! \ldots k!}$ son las distintas ordenaciones que se pueden formar con *n* elementos, teniendo en cuenta que un elemento se repite *a* veces, otro *b* veces, ...., etc., siendo $a+b+......+k=n$. |

## Probabilidad condicionada .-

En muchas ocasiones, la verificación o no de un suceso se estudia en función de otro suceso de cuya verificación depende o del cual está condicionado.

Se dice **probabilidad condicionada** del suceso B respecto del suceso A, y se representa $p(B/A)$, al valor $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, siempre que $p(A) \neq 0$.

En consecuencia, $p(A \cap B) = p(A)\, p(B/A)$.

Dos sucesos $A, B \in \Omega$ se dicen **independientes** si $p(B) = p(B/A)$. Es decir,se cumplirá que $p(A)\, p(B) = p(A \cap B)$

Si A y B son independientes, entonces A y $B^C$ son independientes, $A^C$ y B son independientes, y $A^C$ y $B^C$ son independientes.

Teorema de la probabilidad total:

Si $A_1, A_2, ......., A_n$ son un sistema completo de sucesos tal que $p(A_i) \neq 0$, $\forall\ i = 1,....n$, entonces la probabilidad de un suceso B cualquiera es:

$$p(B) = p(A_1)\, p(B/A_1) + p(A_2)\, p(B/A_2) + ....... + p(A_n)\, p(B/A_n)$$

Teorema de Bayes:

Si $A_1, A_2, ......., A_n$ son un sistema completo de sucesos tal que $p(A_i) \neq 0$, $\forall\ i = 1,....n$, entonces para un suceso B cualquiera se verifica:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(A_1)\, p(B/A_1) + p(A_2)\, p(B/A_2) + ....... + p(A_n)\, p(B/A_n)},$$

y esto para cualquier $i = 1, ...., n$.