Condición para que 3 puntos estén alineados.

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C y_C)$ Estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección, esto ocurre cuando son proporcionales.

$$\boxed{\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}}$$

Punto medio de un segmento.

Punto medio = M   Extremos = $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

$$\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)}$$

Ecuaciones de la recta.

Ecuación vectorial:

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \vec{p} + k\vec{v}}$$

O es el origen

X es un punto de la recta

$\vec{p}$ es un vector posición que nos sitúa sobre la recta

$\vec{v}$ es el vector dirección (paralelo a la recta)

k es un parámetro. Al variar t, varía X sobre la recta.

Ecuaciones paramétricas:

En la ecuación vectorial sustituimos los vectores por sus coordenadas:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k(v_1, v_2)$$

Y expresamos las variables por separado:

Ecuación paramétrica $\boxed{\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}}$

Ecuación continua de la recta:

Despejamos k e igualamos:

$$\left.\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \to k\,\dfrac{x - p_1}{v_1} \\ \to k\,\dfrac{y - p_2}{v_2} \end{matrix} \Bigg\} \longrightarrow \boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

Ecuación implícita o general:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}$$
$$(x-p_1)v_2=(y-p_2)v_1$$
$$xv_2-p_1v_2=yv_1-p_2v_1$$
$$xv_2-yv_1-p_1v_2+p_2v_1=0$$

Cambio de variables: [$A=v_2 \quad B=-v_1 \quad C=p_2v_1-p_sv_2$]

$\boxed{A_x+B_y+C=0}$ El vector (A, B) es perpendicular a la recta r

$\boxed{\vec{v}\perp\_al\_\vec{v}\_director}$

Ecuación explícita de la recta r.

$$A_x+B_y+C=0$$
$$y=\frac{-C-A_x}{B}$$

Cambio de variables: [$m=\frac{-A}{B} \quad n=\frac{-C}{B}$]

$\boxed{y=mx+n}$

Pendiente:

$$[m(x_0+1)+n]-[mx_0+n]=mx_0+m+n-mx_0-n=m$$
$$tga=m$$

Para obtener la pendiente de una r a partir de 2 puntos:

Puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$$\boxed{m=tga=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Forma punto pendiente de la ecuación de una recta:

Conocemos un punto $P(x_0,y_0)$ y su pendiente m, la ecuación es:

$$y=y_0+m(x-x_0)$$

Simétrico de un punto respecto de otro.

Punto $A(x,y)$, El punto de simetría $P(a,b)$, y el punto a averiguar $A'(x',y')$:

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{x+x'}{2}\\ b&=\frac{y+y'}{2}\end{aligned}\right\}$$

Angulo entre dos rectas:

Se coge el más pequeño y se obtiene a partir de los $\overrightarrow{v_d}$ de las dos rectas.

$$\cos a = \frac{\left|\vec{d} \cdot \vec{d'}\right|}{\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{d'}\right|}$$

Paralelismo:

Si (d_1, d_2) es un $\overrightarrow{v_d}$ de la recta r y $k \neq 0$,

Cualquier recta con $\overrightarrow{v_d} = (d_1, d_2)$ o proporcional (kd_1, kd_2), es paralela o coincide con r.

Perpendicularidad:

Cualquier recta con $\overrightarrow{v_d} = (d_2, -d_1)$ o proporcional $(kd_2, -kd_1)$ es perpendicular a r.

Ángulo de dos rectas a partir de la pendiente:

- Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$
- Si las rectas don $\perp$, entonces: $m_1 \cdot m_2 = 1$ o bien: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$
- En general: $tg j = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \longrightarrow tg j = \left|tg(a - b)\right| = \left|\frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}\right| = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|$

Posición relativa de rectas dadas en forma general:

$r \Rightarrow Ax + By + C = 0$ y $s \Rightarrow A'x + B'x + C'x = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'x + C'x = 0 \end{cases}$$

- Si tiene solución única, las rectas se cortan. $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
- Si no tiene solucion, las rectas son paralelas. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
- Si tiene soluciones infinitas son la misma recta. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Posición relativa de rectas dadas :

Dadas las rectas $r\begin{cases} x = a + bk \\ y = c + dk \end{cases}$ $s\begin{cases} x = a' + b't \\ y = c' + d't \end{cases}$

Para hallar su posición relativa resolvemos el sistema con 2 incognitas, k y s:

$\begin{cases} a + bk = a' + b't \\ c + dk = c' + d't \end{cases}$ Igualamos las x y las y de las 2 rectas.

- El sistema tiene solución única (k_0, t_0), las rectas se cortan en un punto cuyas cordenadas se obtienen sustituyendo en r, k por k_0, o bien en s, t por t_0.
- El sistema no tiene solución, las rectas son paralelas.
- El sistema tiene infinitas soluciones, son la misma recta.

Distancias

La distancia entre dos puntos $P(x_P, y_P)$, $q(x_Q, y_Q)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$dist(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

La distancia de un punto $P(a,b)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ es:

$$dist(P,r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEMA 5:

Producto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$ $\longrightarrow$ Es un número. || $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

|| $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

Módulo de un vector:

$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ $\longrightarrow$ Es un número

Cos del ángulo de 2 vectores:

$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ $\longrightarrow$ Es un número

Combinación lineal (CL):

Vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$

Escalares a y b

Vector CL de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ = $\boxed{a\vec{x} + b\vec{y}}$

Coordenadas del vector CL

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y) \\ \vec{v} = (v_x, v_y) \end{array}\right\} = a\vec{u} + b\vec{y} = (au_x + bv_x, au_y + bv_y)$$