

# --ÍNDICE--

Trigonometría		5
	Razones trigonométricas	5
	Coordenadas trigonométricas de un punto del plano	5
	Consecuencias de esta fórmula	5
	Razones exactas de ángulos	6
	Otras fórmulas	6
Aplicaciones de la trigonometría		7
	Teorema del coseno	7
	Teorema del seno	7
Números complejos		7
	Operaciones con números complejos	8
Geometría plana		9
	Operaciones con vectores	9
Rectas		9
	Formas de una recta	9
	Tipos de rectas	10
	Coordenadas del punto medio	10
	Distancia de un punto a una recta	10
	Ecuación de una bisectriz	10
Cónicas		11
	Circunferencia	11
	Elipse	11
	Parábola	11
	Hipérbola	11
Funciones, dominios de funciones y límites		11
	Resolver una inecuación	11
	Obtención de los dominios según el tipo de funciones	12
	Límites de una función	12
	Derivada	12
Derivadas		13
	Fórmulas para derivar	13
Gráficas de una función polinómica		14
	Cocientes de polinomios	14
	Gráficas exponenciales	14
	Gráficas con valor absoluto	14
Integrales		15
	Fórmulas para integrar	15
	Otras fórmulas para integrar	15
	Aplicaciones de las integrales	15
Estadística		17

# 1.-TRIGONOMETRÍA

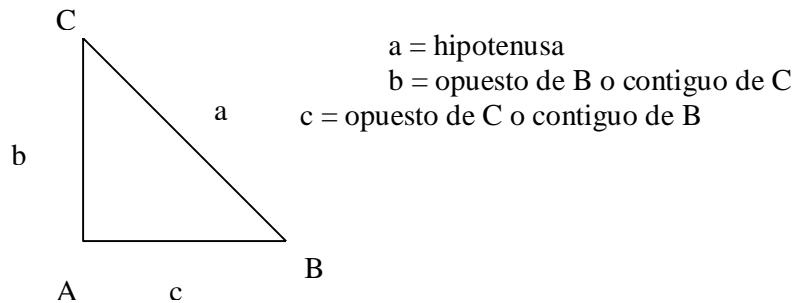
Ángulo: parte del plano comprendido entre dos rectas que se cortan.

Grado: una de las 360 partes en las que se divide un ángulo completo.

Radián: ángulo comprendido entre dos radios, de manera que el arco mida igual que el radio.

## 1.1 Razones trigonométricas

-Son las distintas proporciones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo:



-Las razones se definen para un ángulo agudo:

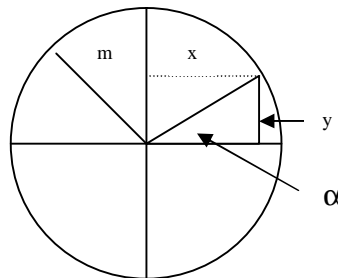
- $b / a = \text{sen}B = \text{cos}C$
- $c / a = \text{cos}B = \text{sen}C$
- $b / c = \text{tg}B = \text{cotg}C$
- $a / b = \text{cosec}B = \text{sec}C$
- $a / c = \text{sec}B = \text{cosec}C$
- $c / b = \text{cotg}B = \text{tg}C$

## 1.2 Coordenadas trigonométricas de un punto del plano

Coordenadas cartesianas: están en función de las medidas de los ejes de coordenadas.

Coordenadas trigonométricas: están en función de la distancia del punto de origen “m”, siendo  $\alpha$  el ángulo que va medido desde el eje  $O_x$  positivo hasta “m”.

- $m^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow m = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\text{sen}\alpha = y / m \Rightarrow y = m \cdot \text{sen}\alpha$
- $\text{cos}\alpha = x / m \Rightarrow x = m \cdot \text{cos}\alpha$



## 1.3 Consecuencias de esta fórmula

1ª Consecuencia

$$m^2 = x^2 + y^2$$

$m^2 = (m \cdot \text{cos}\alpha)^2 + (m \cdot \text{sen}\alpha)^2 \Rightarrow$  Por Pitágoras se verifica esto: por las coordenadas trigonométricas sustituyo x e y.

$$m^2 = m^2 \cdot \cos\alpha + m^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \text{Divido por } m^2$$

$$1 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \text{De esta forma se deduce lo siguiente:}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

-Divido por el  $\operatorname{sen}^2\alpha$  la fórmula fundamental:

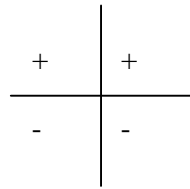
$$1 / \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha / \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha + 1$$

-Divido por el  $\cos^2\alpha$  la fórmula fundamental:

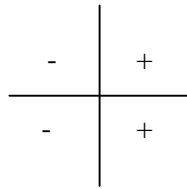
$$1 / \cos^2\alpha = \cos^2\alpha / \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha / \cos^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$$

## 2ª Consecuencia

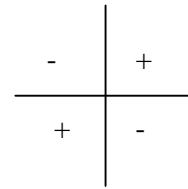
-Según la fórmula  $(x,y) = (m \cdot \cos\alpha, m \cdot \operatorname{sen}\alpha)$  el signo del coseno varía con el signo de la abscisa y el signo del seno con el de la ordenada, porque  $m$  es una distancia y siempre es positiva:



Signo del seno  
Y de la cosecante



Signo del coseno  
Y de la secante



Signo de la tangente  
Y de la cotangente

$\operatorname{Sen} (180 - \alpha) = - \operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{Cos} (180 - \alpha) = - \cos\alpha$	$\operatorname{Tg} (180 - \alpha) = - \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{Sen} (180 + \alpha) = - \operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{Cos} (180 + \alpha) = - \cos\alpha$	$\operatorname{Tg} (180 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{Sen} (-\alpha) = - \operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{cos} (-\alpha) = \cos\alpha$	$\operatorname{Tg} (-\alpha) = - \operatorname{tg}\alpha$

## 1.4 Razones exactas de ángulos

	Sen	Cos	Tg	Cosec	Sec	Cotg
0	$\sqrt{0/2}$	1	0	1/0	1	1/0
30	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
90	1	0	1/0	1	1/0	0
180	0	-1	0	1/0	-1	1/0

-En el Segundo cuadrante los ángulos se relacionan con el suplementario y las razones son las mismas con el signo correspondiente.

-En el tercer cuadrante los ángulos se relacionan con los que difieren un llano, y las razones son las mismas con el signo contrario.

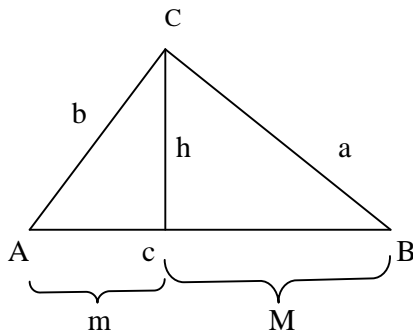
## 1.5 Otras fórmulas

Razones del ángulo suma	Razones del ángulo diferencia
$\operatorname{Sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{Sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{Cos} (\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{Cos} (\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{Tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta / 1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{Tg} (\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta / 1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$
Razones del ángulo doble	Razones del ángulo mitad
$\operatorname{Sen} 2\alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$	$\operatorname{Sen} (\alpha/2) = \pm \sqrt{1 - \cos\alpha} / 2$

$\text{Cos}2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$	$\text{Cos}(\alpha/2) = + - \sqrt{1 + \text{cos}} / 2$
$\text{Tg}2\alpha = \text{tg}(\alpha + \alpha) = 2\text{tg}\alpha / 1 - \text{tg}^2\alpha$	$\text{Tg}(\alpha/2) = + - \sqrt{(1 - \text{cos}\alpha) / 1 + \text{cos}\alpha}$
Razones que transforman el producto en sumas	
$\text{Sen}(\alpha + \beta) + \text{Sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta$	
$\text{Sen}A + \text{sen}B = 2 \text{sen}(A + B / 2) \cdot \text{cos}(A - B / 2)$	
$\text{Cos}(\alpha + \beta) + \text{Cos}(\alpha - \beta) = 2\text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta$	
$\text{Cos}A + \text{cos}B = 2 \text{cos}(A + B / 2) \cdot \text{cos}(A - B / 2)$	
Razones que transforman el producto en resta	
$\text{Sen}A - \text{sen}B = 2 \text{cos}(A + B / 2) \cdot \text{sen}(A - B / 2)$	
$\text{Cos}A - \text{cos}B = -2 \text{sen}(A + B / 2) \cdot \text{sen}(A - B / 2)$	

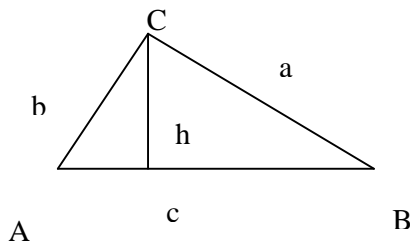
## 2.-APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

### 2.1 Teorema del coseno

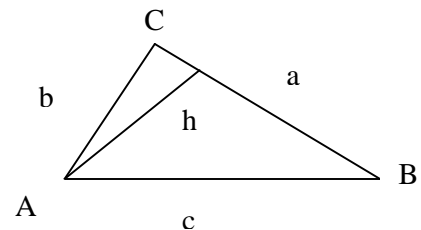


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\text{cos}A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2acc\text{os}B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abc\text{os}C$

### 2.2 Teorema del seno



$b / \text{sen}B = a / \text{sen}A$
$c / \text{sen}C = b / \text{sen}B$



## 3.-NÚMEROS COMPLEJOS

Número imaginario: es la raíz de un índice par de un número negativo

Unidad imaginaria: raíz de menos uno y todo número imaginario que se pone en función de “i”.

Número complejo: suma de un número real y otro imaginario.

### 3.1 Operaciones con números complejos

Suma:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \cdot i$

Producto: se puede hacer de dos formas:

- Forma binómica: como si fueran binomios
- Forma polar: se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

$m \rightarrow$ módulo	$\alpha \rightarrow$ argumento
$m_{\alpha} \cdot m'_{\alpha'} = m \cdot m'_{\alpha + \alpha'}$	

División:

- Forma binómica: se multiplica y divide por el conjugado del denominador.
- Forma polar: se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Potencia:

- Forma binómica: se aplica el binomio de Newton.
- Forma polar: se eleva el módulo y se multiplica el argumento.

Binomio de Newton:  $(a + b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 + \binom{2}{1} \cdot a \cdot b + \binom{2}{2} \cdot b^2$

Triángulo de Tartaglia: Las sumas de las filas 1) da el cuadrado de los números de la diagonal 2).

			2)	1			
			1	1	1)		
		1	2	1			
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1		

# 1.-GEOMETRÍA PLANA

Plano: conjunto de puntos determinados por un par de coordenadas.

Vector: segmento orientado

-Cualquier par de puntos del plano determina un vector, pero para trabajar con él hay que desplazarlo al origen:  $\vec{AB} = (a,b) = B - A = \text{extremos-origen}$

## 1.1 Operaciones con vectores

Suma:

$$u = (a, b)$$

$$u + v = (a + c, b + d)$$

$$v = (c, d)$$

Producto:  $n^\circ \cdot u = n^\circ \cdot (a, b) = (n^\circ \cdot a, n^\circ \cdot b)$

Combinación lineal: operación que combina sumas y productos, el resultado es otro vector.

Base de un plano: número de vectores mínimos que se necesita para que a partir de ellos se puedan formar los demás.

Producto escalar: es el módulo del primer vector por el módulo del segundo por el coseno del ángulo que forman ambos vectores, y tiene por resultado un número.

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha = n^\circ$$

Espacio euclídeo: vectores con las tres operaciones más producto exterior y producto escalar y todas sus propiedades.

Forma analítica del producto escalar: es la fórmula que multiplica los vectores si se conocen sus coordenadas.

$$u = (a, b)$$

$$u \cdot v = (a \cdot c + b \cdot d) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$$

$$v = (c, d)$$

**\*Aplicaciones del producto escalar:**

- Si el producto escalar da cero es que los vectores son perpendiculares
- El producto escalar nos permite hallar el ángulo que forman los dos vectores:

$$\cos\alpha = u \cdot v / |u| \cdot |v|$$

- Cálculo de la proyección de un vector sobre otro:

$$\text{Proy}_u^v = u \cdot v / |u|$$

- Cálculo del área de un triángulo conociendo sus coordenadas

$$A = (AC \cdot AB) / 2$$

## 2.-RECTAS

### 2.1 Formas de una recta

- F. vectorial:  $(x, y) = (x_1, y_1) + n \cdot (a, b)$

- F. paramétrica:  $\left. \begin{array}{l} x = x_1 + an \\ y = y_1 + bn \end{array} \right\}$

- F. continua:  $n = (x - x_1) / a$

$$(x - x_1) / a = (y - y_1) / b$$

$$n = (y - y_1) / b$$

- F. punto-pendiente:  $y - y_1 = (b / a) \cdot (x - x_1)$ .  $(b / a) = m \rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
- F. reducida o explícita:  $y = mx + c$
- F. general:  $Ax + By + C$
- F. segmentaria:  $x / (-C / a) = y / (-C / b)$

## 2.2 Tipos de rectas

Paralelas: son las que tienen la misma dirección, por tanto, la misma pendiente y el mismo vector. Dos rectas son paralelas si en su forma general, los coeficientes x e y son proporcionales:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A / A' = B / B' \neq C / C'$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

Perpendiculares: si una recta tiene como dirección  $u = (a, b)$ , su perpendicular tiene como dirección  $u = (-b, a)$  o  $(b, -a)$ . Y las pendientes también están relacionadas:

- La pendiente de  $u = b / a = m$
- La pendiente de  $u = a / -b = -1 / m$

## 2.3 Coordenadas del punto-medio

Punto medio:  $\left\{ \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right\}$

\*Aplicaciones de esta fórmula

- Cálculo de la recta mediatriz: es la recta perpendicular en el punto medio. Primero se calcula el punto medio, el vector, la perpendicular del vector y por último la forma general de la recta.
- Cálculo del simétrico: se define B como simétrico de A respecto de una recta si el segmento AB es perpendicular a una recta y esta pasa por el punto medio.
- Cálculo de la recta altura: se calcula hallando el vector del lado opuesto, del que no queremos hallar la altura, luego la perpendicular y luego le forma general de la recta.
- Cálculo de la mediana: primero se calcula el punto medio del lado opuesto, luego el vector entre el lado por donde pasa la mediana y el punto hallado anteriormente y por último la forma general de la recta.

## 2.4 Distancia de un punto a una recta

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada por el punto comprendido entre este y aquella. Su fórmula es:  $(P, r) = Ax_1 + By_1 + C / \sqrt{(A^2 + B^2)}$

## 2.5 Ecuación de una bisectriz

Ecuación:  $d(p, r) = d(p, s)$

$$(Ax + By + C) / \sqrt{(A^2 + B^2)} = + - (A'x + B'y + C') / \sqrt{(A'^2 + B'^2)}$$

### 3.-LUGARES GEOMÉTRICOS DE PUNTOS - CÓNICAS

Lugar geométrico: es el conjunto de puntos del plano que cumplen una cierta condición geométrica, el resultado puede ser una recta o una curva. Las curvas son las cónicas y son:

- Circunferencia
- Elipse
- Parábola
- Hipérbola

#### 3.1Circunferencia

Es el lugar geométrico de puntos cuya distancia a un punto fijo, el centro, es constante e igual al radio.

Su ecuación es:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

\*Posición de una recta respecto de una circunferencia

d ( c , recta)	Resolviendo el sistema	Tipo de recta
d > r	No tiene solución	Recta exterior, no corta
d = r	Una solución, un punto de corte	Recta tangente
d < r	Dos soluciones, dos puntos de corte	Recta secante

#### 3.2Elipse

Es el lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Su ecuación es:  $d(P, F) + d(P, F') = cte \rightarrow \sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]} + \sqrt{[(x - c)^2 + (y - d)^2]} = cte$

#### 3.3Parábola

Es el conjunto de puntos que dista lo mismo de una recta llamada directriz que de un punto llamado foco.

Su ecuación es:  $d(P, F) = d(P, \text{directriz}) \rightarrow \sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}$

#### 3.4Hipérbola

Es el lugar geométrico de puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. EL resultado son las curvas simétricas entre sí, y simétricas a la línea que unen los focos.

Su ecuación es:  $d(P, F) - d(P, F') = cte \rightarrow \sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2]} - \sqrt{[(x - c)^2 + (y - d)^2]} = cte$

### 4.-FUNCIONES. DOMINIOS DE FUNCIONES Y LÍMITES

Función: es una correspondencia entre dos conjuntos de números, de manera que si los números son reales se dice que la función es de variable real.

Dominio de una función: es el conjunto de variables que tiene imagen.

#### 4.1Resolver una inecuación

Primero se resuelve la ecuación. Con los valores obtenidos se separan intervalos. Y se observa que intervalos hacen positiva a la inecuación.

## 4.2 Obtención de los dominios según el tipo de funciones

- Función polinómica: su dominio es el conjunto  $\mathbb{R}$ , todos los elementos tienen imagen, por tanto, también tienen gráfica.  
 §  $D = \mathbb{R}$   
 § Gráfica =  $[(x, f(x))]$
- Cocientes de polinomios: el dominio es el conjunto de números de manera que el dominio sea distinto de cero. No se forma una inecuación.  
 §  $D = \{x \mid q(x) \neq 0\}$   
 § Gráfica:  $f(x) = p(x) / q(x)$
- Función trigonométrica: el seno y el coseno tienen por dominio  $\mathbb{R}$ . Mientras que la tangente, la secante, la cosecante y la cotangente se estudian como cocientes.
- Función logarítmica: su dominio es:  
 §  $D = \{x \mid g(x) > 0\}$
- Función exponencial: son contrarias a los logaritmos. Su dominio, en general, es  $\mathbb{R}$ , si el exponente tiene dominio  $\mathbb{R}$ , y si no coincide con el dominio del exponente. Su base tiene que ser mayor que 1 y positiva, entre 0 y 1, pero nunca negativa, ni 0 ni 1. Si lo fuese no tendría sentido ni su gráfica ni su dominio, porque el resultado sería un conjunto de puntos aislados entre sí.

## 4.3 Límites de una función

Es una función se diferencian dos tipos de límites:

- Que  $x \rightarrow n^\circ$
- Que  $x \rightarrow +\infty$  o  $-\infty$
- Límite cuando  $x \rightarrow n^\circ$ : es el valor al que se acerca la función cuando  $x$  se acerca al número dado. Para hacer este límite se sustituye la  $x$  por dicho número, el resultado es válido siempre que no dé una indeterminación. La indeterminación es cualquier resultado del siguiente cuadro:

0 / 0	/	0 .
1	0	

- Límite cuando  $x \rightarrow n^\circ$  de un cociente de polinomios: se sustituye la  $x$  por dicho número y ese es el resultado excepto que de indeterminación. En este caso se descomponen los polinomios, se simplifica la expresión y que se vuelve a sustituir. Si vuelve a dar indeterminación se repite el método.
- Límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  o  $-\infty$ , en un cociente de polinomios: el significado de estos límites es calcular hacia donde se acerca la función, cuando  $x \rightarrow +\infty$  o  $-\infty$ , y análogamente, se podría hallar cuando  $x \rightarrow n^\circ$ , que indicaría donde comienza la gráfica.
- Límites del número e: todo número real definir como límite de una sucesión, un conjunto de números ordenados y contables, "e" es el límite al que tiende esa sucesión.

## 4.4 Derivada

En una función continua en un punto  $a$ , que  $a$  y los valores de  $a$  pertenezcan al dominio. El objetivo es trazar en el punto  $f(a)$  una recta tg.

Función derivada: es la expresión con variable  $x$ , que representa a la derivada en cualquier punto, es decir, la pendiente de las rectas tg a la curva en todos los puntos.  $f'(x) = \lim$

# 1.-DERIVADAS

La función derivada representa a todas las pendientes de las rectas tangentes.

## 1.1 Fórmulas para derivar

$Y = xn$	$Y' = nxn-1$
$Y = K(\text{constante})$	$Y' = 0$
$Y = f(x) + g(x)$	$Y' = f'(x) + g'(x)$
$Y = k \cdot f(x)$	$Y' = k \cdot f'(x)$
$Y = f(x) \cdot g(x)$	$Y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$Y = f(x) / g(x)$	$Y' = [f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)] / 2$
$Y = f[g(x)]$	$Y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
$Y = \ln x$	$Y' = 1 / x$
$Y = \ln f(x)$	$Y' = [1 / f(x)] \cdot f'(x)$
$Y = \lg x$	$Y' = [1 / x] \cdot lge$
$Y = \lg f(x)$	$Y' = [1 / f(x)] \cdot lge \cdot f'(x)$
$Y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$Y' = 1 / [n \cdot \sqrt[n]{x}^{n-1}]$
$Y = \sqrt[n]{f(x)}$	$Y' = f'(x) / [n \cdot \sqrt[n]{f(x)}^{n-1}]$
$Y = \text{sen } x$	$Y' = \text{cos } x$
$Y = \text{sen } f(x)$	$Y' = \text{cos } f(x) \cdot f'(x)$
$Y = \text{cos } x$	$Y' = -\text{sen } x$
$Y = \text{cos } f(x)$	$Y' = -\text{sen } f(x) \cdot f'(x)$
$Y = \text{tg } x$	$Y' = \text{sec}^2 x$
$Y = \text{tg } f(x)$	$Y' = \text{sec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
$Y = \text{cotg } x$	$Y' = -\text{cosec}^2 x$
$Y = \text{cotg } f(x)$	$Y' = -\text{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
$Y = \text{sec } x$	$Y' = \text{sen } x \cdot \text{sec}^2 x$
$Y = \text{sec } f(x)$	$Y' = \text{sen } f(x) \cdot \text{sec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
$Y = \text{cosec } x$	$Y' = -\text{cos } x \cdot \text{cosec}^2 x$
$Y = \text{cosec } f(x)$	$Y' = -\text{cos } f(x) \cdot \text{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
$Y = e^x$	$Y' = e^x$
$Y = e^{f(x)}$	$Y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$Y = a^x$	$Y' = a^x \cdot \ln a$
$Y = a^{f(x)}$	$Y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$Y = \text{arcsen } x$	$Y' = 1 / [\sqrt{1-x^2}]$
$Y = \text{arcsen } f(x)$	$Y' = [1 / [\sqrt{1-f(x)^2}]] \cdot f'(x)$
$Y = \text{arctg } x$	$Y' = 1 / x^2 + 1$
$Y = \text{arctg } f(x)$	$Y' = [1 / [f(x)^2 + 1]] \cdot f'(x)$

## 2.-Gráfica de una función polinómica

función polinómica: es una gráfica continua para todos los números reales, porque todos los números tienen imagen, la gráfica es una línea curva seguida. En todo polinomio, para hacer la gráfica hay que estudiar:

- cortes con los ejes
- intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos
- intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión
- simetrías
- recorrido de la gráfica
- cotas

### 2.1 Cocientes de polinomios

El dominio es  $\mathbb{R}$ , menos los que anulan al denominador.

Para hallar la asíntota vertical se calcula el límite que tiende a 1 de la función. Y para calcular la vertical se haya el límite que tiende a infinito de la función.

Para calcular la asíntota oblicua:  $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) / x$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

### 2.2 Gráficas exponenciales

Son aquellas gráficas que tienen por base un número y en el exponente una función de variable  $x$ . El dominio es siempre el dominio del exponente.

### 2.3 Gráficas con valor absoluto

Hay dos tipos:

Cuando todo está entre barras: primero se hace sin barras, y toda la parte de curva que queda debajo del eje de abscisas pasa simétricamente encima.

Cuando solo está entre barra una parte: primero se quitan las barras sustituyendo las barras por un paréntesis, si lo que está dentro de las barras es positivo se sustituye por su opuesto y viceversa.

Luego se representa por separado las dos funciones y se toma la parte que corresponde a cada intervalo.

# 1.-INTEGRALES

Integrar: es la operación contraria a derivar. A integrar también se le llama obtener la primitiva. Se representa con  $\int$ .

## 1.1 Fórmulas para integrar

$\int x^n dx$	$[X^{n+1} / n + 1] + C$
$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx$	$[F(x)^{n+1} / n + 1] + C$
$\int [f(x) \cdot g(x)] dx$	$\int f(x) dx + \int g(x) dx + C$
$\int [f(x) \cdot a]$	$a \cdot \int f(x) dx + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int a^x dx$	$[a^x / \ln a] + C$
$\int e^{f(x)} dx$	$e^{f(x)}$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx$	$[a^{f(x)} / \ln a] + C$
$\int \cos x dx$	$\text{Sen} x + C$
$\int \cos f(x) dx$	$\text{Sen} f(x) + C$
$\int \text{sen} x dx$	$-\cos x + C$
$\int \text{sen} f(x) dx$	$-\cos f(x) + C$
$\int f'(x) / f(x) dx$	$\text{Ln}[f(x)] + C$
$\int f'(x) / f(x)^2 + 1 dx$	$\text{Arctg} f(x) + C$
$\int 1 / \sqrt{1 - x^2} dx$	$\text{Arcsen} x + C$
$\int f'(x) / \sqrt{1 - f(x)^2} dx$	$\text{Arcsen} f(x) + C$
$\int 1 / x \cdot \sqrt{x^2 - 1} dx$	$\text{Arcsec} x + C$
$\int f'(x) / [f(x) \cdot \sqrt{f(x)^2 - 1}] dx$	$\text{Arcsec} f(x) + C$
$\int \text{sen}(ax) \cdot \cos(bx) dx$	$\int \text{sen}(ax + bx) + \text{sen}(ax - bx) / 2 dx$
$\int \text{sen}(ax) \cdot \text{sen}(bx) dx$	$\int \cos(ax + bx) - \cos(ax - bx) / 2 dx$

## 1.2 Otras fórmulas para integrar

Ej:  $\int x \cdot \text{sen} x dx = u \cdot v - \int v \cdot du = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx \rightarrow -x \cdot \cos x + \text{sen} x + C$

$X = u \rightarrow dx = du$

$\text{Sen} x dx = dv \rightarrow \int \text{sen} x dx = \int dv \rightarrow -\cos x = v$

## 1.3 Aplicaciones de las integrales

Integral indefinida: tiene en los extremos del signo dos números de manera que primero se hace la integral de la función de la manera habitual y en el resultado obtenido se sustituyen los números que dan en los extremos y se resta el resultado. Su resultado es un número que tiene varios significados.

### \*Aplicación al área

Una función  $[y = f(x)]$  continua, en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , la integral definida de la función entre los extremos  $a$  y  $b$   $\int_a^b f(x) dx$  calcula el área limitada por la curva  $x = a$ , la recta  $x = b$  y el eje de abscisas. Considerando que la función está encima del eje. Si el área está por debajo del eje, el signo de la función dentro de la integral sería negativo.

### \*Área entre dos funciones

- Si no se llegan a cortar, la fórmula sería:  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
- Si se cortan las dos funciones en dos puntos la fórmula sería:  
 $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

- Si se cortan en tres puntos, la fórmula sería:  $\int_a^b f(x) - g(x) dx + \int_b^c g(x) - f(x) dx$
- Si las gráficas solo tienen en común un punto y se trata de una recta tangente: la fórmula sería:  $\int_a^b [f(x) - \text{recta tg}] dx$
- Si las gráficas solo tienen en común un punto y es una recta: la fórmula sería:  
 $\int_0^a f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$

**\*Aplicación a los volúmenes**

Se supone una curva continua y un intervalo limitado por  $x = a$  y  $x = b$ . La fórmula para calcular el volumen sería:  $V = \Pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

**\*Áreas hacia el eje de ordenadas**

- $A = \int_a^b f(y) dy$

**\*Volúmenes hacia el eje de ordenadas**

- $V = \Pi \int_a^b [f(y)^2] dy$

# 1.-ESTADÍSTICA

Estadística: es la parte de las matemáticas que estudia los resultados de un muestreo realizado sobre un colectivo.

Variable: “hecho” que se somete a estudio. ( $X_i$ ) Puede ser:

- V. discreta: aquella que corresponde a un número finito de datos aislados entre sí.
- V. continua: cuando recorre cualquier valor de un intervalo.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite la variable  $N$  es el total de encuestados. ( $N_i$ )

Frecuencia relativa: cociente entre la frecuencia absoluta y el total de frecuencia absoluta. En las discretas, la frecuencia relativa, su sumatorio, debe dar 1. En las continuas, la frecuencia de densidad es:  $\int_a^b f(x) dx = 1$ , siendo  $a$  y  $b$  el intervalo que recorre la variable. [ $f_i(x)$ ]

Media aritmética:

- En la discreta:  $x = \frac{\sum X_i + N_i}{N}$
- En la continua:  $x = \int_a^b x \cdot f(x) dx$

Varianza: es un parámetro que indica lo que se desvían los datos de la media aritmética. Se calcula con la diferencia de los datos elevada al cuadrado. Por tanto, es más preciso el parámetro de la “desviación típica” que se halla con la raíz cuadrada de la varianza. Es la media aritmética de las desviaciones al cuadrado.

- En la discreta:  $V = \sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot f(x)$
- En la continua:  $V = \int_a^b (X - \bar{X})^2 \cdot f(x)$
- Desviación típica:  $\sqrt{\text{Varianza}}$