El Álgebra es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo mas general posible.

TEMA 1

1.VALOR ABSOLUTO.

El valor absoluto de una cantidad es el numero que representa la cantidad sin importar el signo o sentido de la cantidad. Por ejemplo el valor absoluto de un numero positivo es el mismo que el numero original; el valor absoluto de un número negativo, es el valor del numero pero sin el signo.

Ejemplo.

$|16| = 16$; $|-16| = 16$; $|8| = 8$; $|-8| = 8$

1.1 LEY DE LOS SIGNOS

Suma y resta de números con un mismo y con diferente signo.

Cuando dos números positivos se suman el resultado es positivo.

Cuando dos números negativos se suman el resultado es negativo.

Cuando se suma un numero positivo y un numero negativo se toma el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo:

3+4 = 5   -3+(-5) = -8   -6 + 20 = 14

5+7= 12   -9+(-3) = -6   5 + (-20) = -15

Multiplicación y División de números con un mismo y con diferente signo.

Cuando se multiplican o dividen dos números con el mismo signo, el resultado es positivo.

Cuando se multiplican o dividen dos números con diferente signo , el resultado es negativo.

Ejemplo:

6.5 = 30   5. (-7)= -35

12 ÷ 6 = 2   -3. 5 = 15

(-3) . (-5) = 15   20 (-10) = -2

(-25) (-5) = 5   -36 (6) = -6

1.2 LEYES DE LOS EXPONENTES.

Al revisar una potencia veremos que:

$X° = 1$
Como cualquier numero diferente de cero o una variable elevada a la potencia cero es indefinido.
Al haber un numero son una variable o sin exponente se supone que esta elevado a la cero potencia. Por ejemplo.
$7° = 7$ $y^1 = y$

El exponente cero

Este proviene de dividir potencias iguales de la misma base.

1. $a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a°$.   2.- $y^7 \div y^7 = y^{7-7} = y°$.

En general existen 10 leyes de los exponentes:

Al hacer una multiplicación los exponentes se suman.

1.-$x^a \ (x^b) = x^{a+b}$

por ejemplo:

a) $x^3 \ (x^4) = x^{3+4} = x^4 = x^3$

1.1 $X^3 \ (x^4) = (x.x.x)\ (x.x.x.x) = x^7$

Al hacer una división los exponentes se restan.

2.-$x / x = x$

por ejemplo:

b)$x / x = x = x = x$

2.1 $\frac{x}{x} = \frac{x.x.x.x.x.x}{x.x} = (x.x.x.x) = x$

Al elevar a una potencia, los exponentes se multiplican.

3.- (x)   = x

Por ejemplo:

c).- (x   )   = x   = x   =   x

3.1 (x   )   = (x.x.x.x) (x.x.x.x) = x

4.-(xy)   = x (y)

por ejemplo:

d).- (xy)   = x y = xy

4.1.- (xy) =(xy) (xy) (xy) = (x.x.x) (y.y.y) = x y

5.-(x/y)   = x / y

por ejemplo:

e).- (x/y)   = x / y   = x / y   o x/y

5.1 $\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(x)\,(x)\,(x)\,(x)}{(y)\,(y)\,(y)\,(y)} = \frac{x}{y}$

6.- 1/x   = x

por ejemplo:

f).- x / x   = x   = x   = 1/x = x

6.1 $\frac{x}{x} = \frac{(x.x)}{(x.x.x)} = \frac{1}{x}$

7.-   x = x

7.1 $\frac{x}{x} = \frac{(x.x)}{(x.x.x)} = \frac{1}{x}$

8.- En esta regla , como dice la regla uno los exponentes de base común se suman en la multiplicación, el exponente de x cuando se suman a si mismo, debe de ser igual a uno. Ya que ½ + ½ = 1, y el exponente de x es ½.
Así que, x . x = x . x = = x^1 = 1

8.- **x = x**

por ejemplo:

h) x = x

8.1.- x . x . x = x, entonces x . x .x = x = x^1 = x

9.- x = x = (x)

por ejemplo

i) x = (x) o (x)

o también:

4 = (4) = (4) = (± 2) = ± 8

4 =(4) = (64) = 64 = ± 8

10.- 1/x = x

j) x = 1/x = 1/(x) o 1/(x)

o también:

10.1 27 $= \frac{1}{(27\ )} = \frac{1}{(729)} = \frac{1}{9}$

27 $= \frac{1}{(27\ \ )} = \frac{1}{(3)} = \frac{1}{9}$

POTENCIACIÓN

La potencia *de una expresión algebraica es la misma expresión o el resultado de tomarla como factor dos o más veces.*
Así:

La primera potencia de una expresión es la misma expresión:
Ejemplo:
$(2a)^1 = 2a$

La segunda potencia o cuadrado de una expresión es el resultado de tomarla como factor dos veces.
Por ejemplo:
$(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$

El cubo de una fracción es el resultado de tomarla como factor tres veces.
Por ejemplo:
$(2a)^3 = 2a \times 2a \times 2a = 8a^3$

así: $(2a)^n = 2a \times 2a \times 2a$ ....n veces.

El signo de las potencias.

Al elevar una potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva., ya que este equivale a un producto en que todos los factores son positivos.

En el caso de las potencias de cantidades negativas:

1.-Toda cantidad par de una cantidad negativa es positiva.
2.- Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa.

Se puede decir lo siguiente:

$(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a) = 4a^2$
$(-2a)^3 = (-2a) \times (-2a) \times (-2a) = -8a^3$
$(-2a)^4 = (-2a) \times (-2a) \times (-2a) \times (-2a) = 164a^4$.

Potencias en polinomios

Para elevar un monomio a una potencia se eleva su coeficiente a esa potencia y se multiplica el exponente de cada letra por el exponente que indica la potencia.
Si el monomio es negativo, el signo de la potencia es + cuando el exponente es par, y es – cuando es exponte es impar-

Por ejemplo:

a).-$(3ab^2)^3$

$(3ab^2)^3 = 3^3 .a^{1x3}.b^{2x3} = 27\ a^3b^6$.

b).-$(-3a^2b^3)^2$

$(-3a^2b^3)^2 = 3^2.a^{2x2}.b^{3x2} = 9a^4b^6$

Cuando el monomio es una fracción, para elevarlo a una potencia cualquiera, se eleva su numerador y su denominador a esa potencia.
Así:

$$\left[-\frac{2x}{3y^2} \right]^4 = \frac{(2x)^4}{(3y^2)^4} = \frac{16x^4}{81y^8}$$

Cubo de un binomio

Se sabe que:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^{2.}$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 + 3ab^2 - b^{2.}$

Al llevar a efecto $(4a^3 +5a^2b^2)^3 .= (4a^3)^3 +(4a^3)^2 (5a^2b^2) + 3 (4a^3) (5a^2b^2)^2 + (5a^2b^2)^3$
$= 64a^9 + 240a^8b^2 + 300\ a^7 b^4 +125a^6b^6$

El triangulo de pascal.
Los coeficientes de los terminos del desarrollo de cualquier potencia de un binomio los da en seguida el triangulo de pascal.

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

Los coeficientes del desarrollo de cualquier potencia de un binomio son los números que se hallan en la fila horizontal en que después del 1 esta el exponente del binomio.
Así, los coeficientes del desarrollo de $(x + y)^4$ son los números que están en la fila horizontal en que después del 1 está el 4, ósea 1,4,6,4,1.
Los coeficientes del desarrollo de $(m + n)^5$ son los números de la fila horizontal en que después del 1 está el 5, ósea 1, 5,10, 10, 5, 1.
Los coeficientes del desarrollo de $(2x\text{-}3y)^7$ son los números de la fila horizontal en que después del 1 está el 7, o sea 1,7,21, 35, 35, 21, 7, 1.
En la practica, basta formar el triangulo hasta la fila horizontal en que después del 1 viene el exponente de binomio. Los números de esta ultima fila son los coeficientes que se necesitan.

MINIMO COMUN MULTIPLO.

COMUN MÚLTIPLO. De dos o màs expresiones algebraicas es toda expresión algebraica que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

Asì, 8ab es comùn múltiplo de 2ª y 4ab porque 8ab es divisible exactamente por 2ª y por 4ab ; 3x-9x+6 es comùn múltiplo de x-2 y de x-3x+2 porque 3x-9x+6 es divisible exactamente por x-2 por x-3x+2.

MINIMO COMUN MÚLTIPLO. De dos o mas expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas .

Asì , el m.c.m. es de 4ª y 6ª es 12ª ; el m.c.m.de 2x , 6x y 9x es 18x. La teoría del m.c.m. es de suma importancia para las fracciones y ecuaciones.

M.C.M DE MONOMIOS.

REGLA:

Se halla el m.c.m de los coeficientes y a continuación de èste se escriben todas las letras distintas, sean o no comunes , dando a cada letra el mayor exponente que tenga en las expresiones dadas.

(1) Hallar el m.c.m. de ax y ax.

Tomamos a con sumayor exponente x y con su mayor exponente x y tendremos :m.c.m.=ax.

(2) Hallar el m.c.m. de 8abc y 12ab → 8abc=2abc

12ab=2.3ab

el m.c.m.de los coeficientes es 2.3. A continuación escribimos a con su mayor exponente b y c, luego:

m.c.m.=2. 3abc.

M.C.M.DE MONOMIOS Y POLINOMIOS.

REGLA:

Se descompone las expresiones dadas en sus factores primos .el m.c.m.es el producto de los factores primos ,comunes y no comunes, con su mayor exponente.

(1) Hallar el m.c.m. de 6 , 3x –3.

descomponiendo 6=2.3

3x-3=3(x-1)

m.c.m.=2.3(x-1)=6(x-1)

(2) Hallar el m.c.m. de 14a , 7x-21

descomponiendo 14a=2.7a

7x-21=7(x-3)

el m.c.m.=2.7.a (x-3)=14a(x-39)

(3) Hallar el m.c.m. de $15x$,$10x + 5x$, $54x$

como $15x$ està contenido en $45x$, prescindimos de $15x$

descomponiendo :$10x + 5x=5x(2x+1)$
$45x=3 .5 .x$
m.c.m.$=3 . 5.x (2x+1)=45x (2x+1)$

M.C.M. DE POLINOMIOS.

La regla es la misma del caso anterior.

(1) Hallar el m.c.m. de $4ax – 8axy+ 4ay$, $6bx-6by$

descomponiendo:

$4ax – 8axy+4ay =4a (x-2xy+y)=2 .a(x-y)$
$6bx-6by=6b(x-y) \quad =2.3b (x-y)$
elm.c.m.$=2 .3.ab (x-y) =12ab (x-y)^2$

2) Hallar el m.c.m. de x^3+2bx^2,$x^3y + x^2y^2 + 4by^2 + 4b^2y^2$

$x^3 +2bx^2=x^2(x+2b)$
$x^3y-4b^2xy=xy(x^2-4b^2) \quad = xy(x+2b) (x-2b)$
$x^2y^2+4bxy^2+4b^2y^2=y^2(x^2+4bx+4b^2)=y^2(x+2b)^2$

el m.c.m.$= x^2y^2(x+2b)^2(x-2b)$

MAXIMO COMUN DIVISOR

FACTOR COMUN O DIVISOR COMUN. De dos o mas expresiones algebraicas es toda expresión algebraica que està contenida exactamente en cada una de las primeras.

Asi , x es divisor comùn de 2x y x^2; 5ab es divisor comun de $10^{a3}b^2$ y $15^{a4}b$.

Una expresión algebraica es prima cuando sòlo es dividible por ella misma y por la unidad. Asì ,a , b ,a+b y 2x-1 son expresiones primas.

Dos o mas expresiones algebraicas son primas entre si cuando el ùnico divisor comun que tienen es la unidad ,como 2x y 3b; a+b y a-x

MÁXIMO COMUN DIVISOR de dos o mas expresiones algebraicas es grado que esta contenida exactamente en cada una de ellas .

Asi , el m.c.d. de$10a^2b$ y $20a^3$ es $10a^2$; el m.c.d. de $8a^3n^2$, $24an^3$ y $40a^3n^4p$ es $8an^2$

M.C.D. DE POLINOMIOS.

REGLA.

Se halla el m.c.d.de los coeficientes y a continuación de èste se escriben las letras comunes, dando a cada letra el menor exponente que tenga en las expresiones dadas.

(1) Hallar el m.c.d. de a^2x^2 y x a^3bx

el m.c.d. de los coeficientes es 1. las letras comunes son a y x tomamos a con su menor exponente : a^2 y x con su menor exponente x; la b no se toma porque no es comun . el m.c.d. sera a^2x. R.

(2) Hallar el m.c.d. de $36a^2b^4$, $48a^3b^3c$ y $60a^4b^3m$

descomponiendo en factores primos los coeficientes ,tenemos

. $36a^2b^4=2^2.3^2.a^2b^4$

$48a^3b^3c=2^4.3.a^3b^3c$

$60a^4b^3m=2^2.3.5.a^4b^3m$

el m.c.d. de los coeficientes es $2^2.3$. las letras comunes son a y b . tomamos a con su menor exponente : a^2 y b con su menor exponente : b^3; c y m no se toman porque no son comunes.
Tendremos: m.c.d. = $2^2.3.a^2b^3= 12a^2b^3$ R.

M.C.D DE POLINOMIOS

Al hallar el m.c.d. de dos o mas polinomios puede ocurrir que los polinomios puedan factorarse fácilmente o que su descomposición no sea sencilla. En el primer caso se halla el m.c.d. factorando los polinomios dados ; en el segundo caso se halla el m.c.d. por divisiones sucesivas.

m.c.d. de polinomios por descomposicion en factores .

REGLA.

Se descomponen los polinomios dados en susfactores primos . el m.c.d. es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

(1) Hallar el m.c.d. de $4a^2+ 4ab$ y $2a^4-2a^2b^2$

factorando estas expresiones : $4a^2+4ab =4a (a+b)=2^2a (a+b)$

$2a^2-2a^2b^2=2a^2(a+b)(a-b)$

los factores comunes son 2, a y (a+b),luego m.c.d.=2 a(a+b) R.

(2) Hallar el m.c.d. de x^2-a, x^2-x-6 y x^2+4x+4

factorando $x^2-4=(x+2) (x-2)$
$x^2-x-6=(x-3) (x+2)$
$x^2+4x+4=(x+2)$

el factor comun es (x+2) y se toma con su menor exponente, luego m.c.d.= x+2. R.

OPERACIONES CON FRACCIONES .

SUMA.

REGLA PARA SUMAR FRACCIONES.

1.- Se simplifican las fracciones dadas si es posible .
2.-se reducen las fracciones dadas al minimo comun denominador si son distintos denominador
3.-se efectúan las multiplicaciones indicadas
4.-se suman los denominadores de las fracciones que resulten y se parte esta suma por el denominador comun
5.-se reducen términos semejantes en el numerador
6.-se simplifica la fracción que resulte, si es posible.

SUMA DE FRACCIONES CON DENOMINADOR MONOMIO.

(1) SUMAR $3/2^a$ y $a-2/6a^2$

Hay que reducir las fracciones al mínimo común denominador

El m.c.m de los denominadores es $6a^2$ dividiendo $6a^2$ entre los denominadores, tenemos: $6a^2/6a^2=1$ estos cocientes los multiplicamos por los numeradores respectivos y tendremos:

$$3/2a+a-2/6a^2= 3(3a)/6a^2+ a-2/6a^2= 9a/6a^2+a-2/6a^2$$

(sumando los numeradores)= $9a+a-2/6a^2= 10^a-2/6a^2$
simplificando = $2(5^a-1)/6^{a2} = 5^a-1/3a^2$ R.

RESTA.

REGLA GENERAL PARA RESTAR FRACCIONES
(1).- Se simplifica las fracciones dadas si es posible
(2).-Se reducen las fracciones dadas al minimo comun denominador si tienen distintos denominador.
(3)Se efectùan las multiplicaciones indicadas
(4)Se restan los numeradores y la diferencia se parte por el denominador comun
(5).-Se reducen términos semejantes en el numerador
(6).-Se simplifica el resultado si es posible.

RESTA DE FRACCIONES CON DENOMINADORES MONOMIO.

(1) de $a+2b$ / restar $4ab^2-3$ / $6a^2b$

el m.c.m. de los denominadores es $6a^2b$. Dividiendo $6a^2b$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo, tenemos.

$A+2b/3a- 4ab^2-3/6a^2b = 2ab(a+2b)/6a^2b-4a^2b-3/6a^2b$

(multiplicando) $= 2a^2b+4ab^2/6a^2b – 4ab^2-3/6a^2b$

(restando los numeradores) $= 2a^2b+4ab^2-(4ab^2-3)/ 6a^2b$

(quitando paréntesis) $= 2a^2b+4ab^2+3/ 6a^2b$

(reduciendo) $= 2a^2b+3/6a^2b$ R.

(2) restar $x+2/x^2$ de $x-1/3x$

el m.c.m. de los denominadores es $3x^2$, que sera el denominador comun

tendremos: $x-1/3x – x+2/x^2 =x(x-1)/3x^2 – 3(x+2)/3x^2$

(multiplicando) $= x^2-x/3x^2 – 3x+6/3x^2$

(restando los numeradores) $=x^2-x – (3x+6)/ 3x^2$

(quitando el paréntesis) $= x^2-x- 3x-6/3x^2$

(reduciendo) $= x^2-4x-6/3x^2$ R.

SIMPLIFICACION DE FRACCIONES.

Simplificar una fracción algebraica .- es convertirla en una fracción equivalente cuyos termonos sean primos entre si .

Cuando los terminos de una fraccìòn son primos entre si,la fracciòn es irreducible y entonces la fracción èsta reducida a su mas simple expresión o a su mìnima expresión.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CUYOS TERMINOS SEAN MONOMIOS.

REGLA.

Se divide el numerador y el denominador por sus factores comunes hasta que sean primos entre si.

=

(1) simplificar $4a^2b^5/6a^3b^3m$

tendremos $4a^2/6a^3b^3=2.1.b^2/3.a.1=2b^2/3am$

Hemos dividido 4 y 6 entre 2 y obtuvimos 2 y 3; a^2 y a^3 entre a^2 y obtuvimos los cocientes 1 y a ;b^5 y b^3 entre b^3 y obtuvimos los cocientes b^2 y 1. como $2b^2$ y 3am no tienen ningún factor común, esta resulta irreducible

(2) simplificar $9x^3y^3/36x^5y^6$

$9x^3y^3/36x^5y^6= 1.1.1/4.x^2.y^3 = 1/4x^2y^8$.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CUYOS TERMINOS SEAN POLINOMIOS.

Regla

Se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y denominador.

(1) simplificar $\dfrac{2^{a2}}{4^{a2} - 4ab}$.

$$\frac{2^{a2}}{4^{a2} - 4ab} = \frac{2a^2}{4^a(a-b)} = \frac{a}{2(a-b)}$$

Hemos dividido 2 y 4 entre 2 y a^2 y a entre a.

(2) simplificar $\dfrac{4x^2y^3}{24x^3y^3 - 36x^3y^4}$.

$$\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3 - 36x^3y^4} = \frac{4x^2y^3}{12x^3y^3(2-3y)} = \frac{1}{3x(2-3y)}$$

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son multiplicaciones de expresiones algebraicas que se presentan con tanta frecuencia que es posible efectuarlas de manera mecánica.

Primer producto notable.

Producto de binomios que tienen un termino idéntico (o común), es decir, expresiones como (x + a) (x + b).

Usamos la literal **x** en ambos binomios para indicar que se trata de un termino común o idéntico.

Obtengamos el producto de (x + a) (x +b) efectuando la operación como se explico en la multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline x^2 + ax \\ \quad\; + bx + ab \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 + ax + bx + ab$$

Observamos que **ax** y **bx** son términos semejantes que se pueden reducir a un solo termino, como de indica.

$$ax + bx = (a + b)x$$

De manera que tenemos : $\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

Segundo producto notable.

Producto de dos binomios iguales (x +a)(x +a), conocido como el cuadrado de un binomio : $(x + a)^2$

Obtengamos el producto

$$\begin{array}{r} x + a \\ \underline{x + a} \\ x^2 + ax \\ \underline{\quad + ax + a^2} \\ x^2 + ax + ax + a^2 \end{array}$$

Como : $ax + ax = (a + a)x = 2ax$

Tenemos : $\boxed{(x + a)(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$

Tercer producto notable.

Producto de binomio del tipo $(ax + b)(cx + d)$cuando a, b, c y d son números enteros.

Obtengamos el producto :

$$\begin{array}{r} ax + b \\ \underline{cx + d} \\ acx^2 + bcx \\ \underline{\quad + adx + bd} \\ acx^2 + adx + bcx + bd \end{array}$$

Como : $adx + bcx = (ad + bc)x$

Tenemos : $\boxed{(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd}$

Cuarto producto notable.

Producto de binomio del tipo **(x + a)(x - a)**, que se conocen como **binomios conjugados.**

Obtengamos el producto:

$$\begin{array}{r} x + a \\ x - a \\ \hline x^2 + ax \qquad \\ - ax - a^2 \\ \hline x^2 + 0x - a^2 \end{array}$$

Tenemos que : $\boxed{(x + a)(x - a) = x^2 - a^2}$

Quinto producto notable.

Producto de tres binomios iguales del tipo (x + a), conocido como **cubo de un binomio o $(x + a)^3$**

En el segundo producto notable obtuvimos: $(x + a)(x + a)=x^2 + 2ax + a^2$

De manera que para obtener el producto de (x + a)(x + a)(x + a), efectuamos la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} X^2 + 2ax + a^2 \qquad\qquad \\ x + a \qquad\qquad \\ \hline x^3 + 2ax^2 + a^2x \qquad\qquad \\ ax^2 + 2a^2x + a^3 \\ \hline x^3 + 3ax^2 + 3a^3x + a^3 \end{array}$$

entonces : $\boxed{(x + a)(x + a)(x + a)= (x + a)^3= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3}$

Sexto producto notable.

Multiplicación de expresiones del tipo $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Obtengamos el producto :

$$\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \qquad \\ x + y \qquad \\ \hline x^3 - x^2y + xy^2 \qquad \\ x^2y - xy^2 + y^3 \end{array}$$

$$\frac{}{\quad x^3 \qquad\qquad + \ y^3}$$

es decir : $\boxed{(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3}$

Séptimo producto notable.

Multiplicación de expresiones del tipo $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
Obtengamos el producto :

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 \\ x - y \\ \hline x^3 + x^2y + xy^2 \qquad \\ - x^2y - xy^2 - y^3 \\ \hline x^3 \qquad\qquad - y^3 \end{array}$$

Entoces: $\boxed{(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3}$

FACTORIZACIÓN

Factorización de expresiones que tienen factor común.

Observa la siguiente expresión : am + bm + cm
Nota: que *m* es factor en cada uno de los términos; recordando la propiedad distributiva, podemos escribirla así;

am + dm + cm = m (a + b + c)

Factorización de trinomios cuadrados perfectos .

Un trinomio cuadrado perfecto es le resultado que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado; es de esperarse entonces que su factorización sea este binomio.

Trinomio		Factorización
$a^2 + 2ab + b^2$	=	$(a + b)^2$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 \quad = \quad (a - b)^2}$$

si la expresión cuadrática por factorizar se identifica como un trinomio cuadrado prefecto, la factorización es siempre un binomio elevado al cuadrado.

Factorización de expreciones cuadráticas del tipo $x^2 + (a + b)x + ab$, cuando a y b son enteros.

En el tema de productos notables , obtuvimos:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab, \text{ que puede escribirse}$$

$$\boxed{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

Analizando (A) observamos que la expresión cuadrática es igual al producto de **dos factores,** que son dos binomios lineales con un termino común: $(x + a)$ y $(x + b)$.

Factorización de expresiones cuadráticas del tipo
$acx^2 + (ad + bc)x + bd$ cuando a,b,c y d son enteros y $ac = 1$.

Cuando estudiamos productos notables obtuvimos que:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

o bien $\boxed{acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)}$

RADICACIÓN

RAÍZ de una expresión algebraica es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.

Así 2a es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(2a)^2 = 4a^2$ y $-2a$ también es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(-2a)^2 = 4a^2$.

$3x$ es raíz cúbica de $27x^3$ porque $(3x)^3 = 27x^3$.

El **signo de raíz** es $\sqrt{}$, llamado **signo radical.** De baja de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada por eso **cantidad subradical**.

El signo $\sqrt{}$ lleva un **índice** que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad subradical. Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{}$ no lleva índice se entiende que el índice es 2.

Así, $\sqrt{a^4}$ significa una cantidad que elevada al **cuadrado** reproduce la cantidad subradical a^4; esta raíz es a^2 y $-a^2$ porque $(a^2)^2 = a^4$ y $(-a^2)^2 = a^4$.

$\sqrt[3]{8x^3}$ significa una cantidad que elevada al **cubo** reproduce la cantidad subradical $8x^3$; esta raíz es $2x$ porque $(2x)^3 = 8x^3$.

EXPRESION RADICAL O RADICAL. Es toda raíz indicada de un numero o de una expresión algebraica. Así $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9a^3}$, $\sqrt[4]{16a^3}$, son expresiones radicales.

Si la raíz indicada es exacta, la expresión es **racional;** si no es exacta es **irracional.**

Las expresiones irracionales como $2\sqrt{}$, $\sqrt[3]{3a^2}$ son las que comúnmente se llaman **radicales.**

El **grado** de un radical lo indica su índice. Así, $\sqrt{2^a}$ es un radical de segundo grado; $\sqrt[3]{5a^2}$ es un radical de tercer grado; $\sqrt[4]{3x}$ es un radical de cuarto grado.

SIGNOS DE LAS RAICES.

1) Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad subradical.

Así, $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ porque $(3a)^3 = 27a^3$

$\sqrt[3]{27a3} = -3a$ porque $(-3a)^3 = -27a^3$

$\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$ porque $(x^2)^5 = x^{10}$

$\sqrt[5]{-x^{10}} = -x^2$ porque $(-x^2)^5 = -x^{10}$.

2) Las raíces pares de una cantidad positiva tienen doble signo : + y –

Así, $\sqrt{25x^2} = 5x$ o $-5x$ por que $(5x)^2 = 25x^2$ y $(-5x)^2 = 25x^2$.

Esto se indica de este modo : $\sqrt{25x^2} = + - 5x$.

Del propio modo, $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$ porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$.

Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = +-2a$.

CANTIDAD IMAGINARIA.

Las raíces pares de una **cantidad negativa** no se pueden extraer, porque toda cantidad, ya sea positiva o negativa, elevada a una potencia par, da un resultado positivo. Estas raíces se llaman **cantidades imaginarias.**

Así, $\sqrt{-4}$ no se puede extraer. La raíz cuadrada de ~~–4 no~~ es 2 porque $2^2=4$ y no –4, y tampoco es –2porque $(-2)^2=4$ y no –4. $\sqrt{-4}$ es una **cantidad imaginaria**

Del propio modo, $\sqrt{-9}$ $\sqrt{-a^2}$ $\sqrt[4]{-16x^2}$ son cantidades imaginarias

CANTIDAD REAL. ~~Es u~~na expresión que no contiene ninguna cantidad imaginaria. Así, 3a, 8, $\sqrt{5}$ son cantidades reales.

VALOR ALGEBRAICO Y ARITMETICO DE UN RADICAL.

En general, una cantidad tiene tantas raíces de un grado dado como unidades tiene el grado de raíz. Así, toda cantidad tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, etc., pero generalmente una más raíces de éstas son imaginarias. Más adelante hallaremos las tres raíces cúbicas de la unidad, dos de las cuales son imaginarias.

El valor **real** y **positivo** de un radical, si existe, o el valor **real negativo** si no existe el positivo, es lo que se llama **valor aritmético** del radical. Así,

$\sqrt{9} = +- 3$; el valor aritmético de $\sqrt{9}$ es $+3$

$\sqrt[4]{16} = +-2$; el valor aritmético de $\sqrt[4]{16}$ es $+2$

al tratar de radicales, siempre nos referimos a su **valor aritmético.**

RAIZ DE UNA POTENCIA

Para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz.

Decimos que $\sqrt[n]{a_m} = a^{m}/_{n.}$

En efecto : $(a^{m}/_{n})^n = a\,(^{m}/_{n})\,n = a_m$, cantidad subradical

ejemplo.

$$\sqrt{a^4} = a^{4}/_{2} = a^2$$

Si el exponente de la potencia **no es divisible** por el índice de la raíz, se deja indicada la división, originándose de este modo el **exponente fraccionario.**

Ejemplo.

$\sqrt{a} \quad = a^{1/2}$

RACIONALIZACIÒN.

Al proceso de eliminar radicales del denominador de una expresión se le denomina "racionalizar el denominador".

Si el denominador es un radical que no tiene raíz perfecta, deberá convertirse utilizando lo expresado en Pág. Anteriores. "un radical tiene raíz perfecta cuando la cantidad subradical es expresada en factores que están elevados en un exponente múltiplo de la raíz.

Es obvio que nos referimos a expresiones fraccionarias en las cuales el denominador es una expresión radical y cuyo numerador puede no serlo.

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{3\ 5}{2\ 3}$

solución: el radical denominador tendrá raíz perfecta si el exponente de la cantidad subradical es 2; esto se logra multiplicando por 3 , ya que 3 * 3 = 3 = 3

recuerda que si multiplicamos por 3 el denominador, el numerador debe ser multiplicado por la misma cantidad para que no se altere la expresión.

Procedimiento: $\frac{3\ \ 5\ .\ \ 3}{2\ \ 3\quad 3} = \frac{3\ \ 5\ \ 3}{2\ \ 3} = \frac{3\ \ 15}{6} = \frac{1\ \ 15}{2}$

ejemplo: racionalizar el denominador de al expresión $\frac{5}{16}$

solución: como 16 = 2, sustituyendo tenemos: $\frac{5}{16} = \frac{5}{2}$

el radical denominador tendrá raíz perfecta si la cantidad subradical tiene como exponente un múltiplo de 3 (que es el índice de la raíz),; esto se logra multiplicando numerador y denominador por 2 , ya que 2 . 2 = 2

procedimiento: $\frac{5\ .\ 2}{2\quad 2} = \frac{5\ \ 2}{2} = \frac{5\ \ 2}{2} = \frac{5\ \ 2}{8}$

observa que 2 no esta simplificado, de manera que:

$$\frac{5}{16} = \frac{5}{8}\ 2\ .\ 2 = \frac{5}{8}\ .\ 2\quad 2 = \frac{5}{4}\ 4$$

ahora demuestra que se obtiene el mismo resultado y de manera mas facil si el numerador y el denominador se multiplican por 2 , ya que 2 . 2 = 2 ; es decir, la operación se simplifica si se busca el múltiplo más próximo al índice de la raíz.

Ejemplo: racionalizar el denominador de la expresión $\frac{7}{2 - 3}$

en este caso procedemos de manera diferente a la utilizada en los ejemplos anteriores. Observa que el denominador es al diferencia de dos radicales; si multiplicamos por su conjugado, que es (2 + 3), tenemos.

$$(2- 3)(2 + 3) = (2) – (3) = 2-3 = -1$$

y por lo tanto se ha eliminado el denominador radical.

Procedimiento; $\frac{7}{2 - 3} \cdot \frac{2 + 3}{2 + 3} = \frac{7 (2 + 3)}{-1} = \frac{14 + 21}{-1} = - 14 - 21$

RELACIONES

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIONES Y ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

El concepto de función implica la asociación entre los elementos de dos conjuntos, que por lo general son números, y cuya correspondencia es establece mediante una regla de asociación.

Las reglas de asociación entre los elementos de los conjuntos, por lo general, no son fáciles de obtener, ya sea que se use el lenguaje común o el lenguaje matemático.

Algunos sucesos que ocurren en tu entorno son ejemplos sencillos de funciones:

- § Cuando viajas en autobús o en automóvil, en un tiempo determinado recorres distancias que dependen de la velocidad con que se desplaza el vehículo. La distancia recorrida está en función de la velocidad y, como sabes por cursos anteriores de física, regla de asociación es = velocidad por tiempo.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

Si cada elemento de cualquier conjunto X se asocia con exactamente un elemento del conjunto Y a través de una regla de asociación o correspondencia, esto define una función F de X en Y.

- § Al conjunto X se le conoce como el dominio de la función F.
- § Al elemento Y que corresponde a determinado elemento X el dominio se le conoce como la imagen de X bajo F y se le denota como F(X).
- § El conjunto de imágenes F(X) constituyen el conjunto Y, al que se le conoce como el rango de la función F.

De la función conviene destacar lo siguiente:

- § Cada elemento del dominio se asocia con exactamente un elemento del rango, en otras palabras, un elemento del dominio se asocia con uno y sólo un elemento del rango.

- § Las imágenes Y o F(X), que corresponden a los elementos X del dominio, se determina mediante la regla de la asociación o correspondencia.

En una función, de dos o más elementos del dominio pueden asociarse con el mismo elemento del rango, cumpliéndose lo mencionado en la definición sobre que a un elemento del dominio sólo le corresponde un único elemento del rango. Sin embargo, el mismo elemento del dominio no puede asociarse con dos elementos diferentes del rango.

NOTA: Cuando la regla de la función no se cumple se da relación.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN.- Una ecuación es una proposición de igualdad que involucra una o más literales que representan valores no conocidos. Si la proposición sólo involucra números, la ecuación es numérica; si en cambio involucra expresiones algebraicas, se denomina ecuación algebraica.

Ejemplos de ecuaciones numéricas:

1+2+5=8 2+3=5 5-2=3

Son ejemplos de ecuaciones algebraicas:

1. 5x+3=0
2. 8x-3y=2
3. 2ª + 5b = 3c-4

LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO O LINEAL CON UNA SOLA INCÓGNITA.

Una ecuación lineal con una variable es una proposición de la forma

$$ax + b = 0 \qquad \text{con } a = 0$$

Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.

Para encontrar la solución de la ecuación lineal con una incógnita, procedemos de la siguiente manera .

1. Si existen varios términos que contienen a la incógnita, éstos deben situarse en el mismo lado del signo igual, comúnmente del lado izquierdo. Si éste es el caso, se reducen los términos a uno sólo.
2. Si existen varios términos que no contienen a la incógnita, éstos deben situarse al otro lado del signo igual. Si éste es el caso, se reducen los términos a uno solo.
3. Si el coeficiente de la incógnita no es la unidad, se debe transformar en este valor .

En algunas ocasiones se tendrán que efectuar operaciones, adicionales como por ejemplo, eliminar signos de agrupamiento.

Las propiedades de las ecuaciones nos permiten despejar la incógnita y por lo tanto determinar su valor.

A continuación resolveremos un ejemplo señalando las propiedades de las igualdades utilizadas.

Ejemplo: encontrar la solución lineal $7x+8 = 2x-7$

1. Situar los términos en x del lado izquierdo de la igualdad. Identificamos la ecuación de la siguiente manera:

$$7x+8 = 2x-7$$

$$A = B$$

La propiedad aditiva 1) de la igualdad establece que si $A = B$, entonces $A + C = B + C$

Considerando que C es inverso aditivo del término (2x) y aplicando la propiedad tenemos:

$$7x + 8 + (-2x) = 2x - 7 + (-2x)$$

$$A + C = B + C$$

Agrupando y simplificando:

$$7x + 2x + 8 = 2x - 2x - 7$$

$$7x - 2x + 8 = -7$$

Observa que los términos que contienen a x están ahora en el lado izquierdo; simplificando.

$$5x + 8 = -7$$

2. Situar en el lado derecho del signo igual, los términos que no contienen a x, usando nuevamente la propiedad aditiva y considerando como C al inverso aditivo del término 8 que es –8, tenemos:

$$5x + 8 + (-8) = -7 + (-8)$$

simplificando:

$$5x = -7 - 8$$

3. El coeficiente de x debe ser la unidad. Identifiquemos la ecuación de la siguiente manera :

$$5x = -15$$

$$A = B$$

La propiedad multiplicativa de la igualdad establece que si A = B, entonces A . C = B . C

Considerando que C es el inverso multiplicativo del coeficiente de la incógnita (5) que resulta ser (1/5), aseguramos que dicho coeficiente se transforma en la unidad.

$$5 \ \frac{1}{5} \ x = (-15) \ \frac{1}{5}$$

$$x = -\frac{15}{5}$$

de donde $x = -3$

LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON 2 INCOGNITAS.

La ecuación de primer grado o lineal con dos incógnitas se expresa como:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A,B,C = R A = 0 Y B = 0

Al proponer una igualdad involucra a dos variables o incógnitas, representadas por x y y, aun cuando puede usarse cualquier par de letras del alfabeto.

Estas ecuaciones se pueden ver desde los sig. Punto

1.- conocida la ecuación, determinaremos su solución.

2.-Se construira la ecuación apartir de enunciados que conduzacna a ello.

3.-Solución de ecuaciones lineales con dos variables.

Es evidente que la solución de estas ecuaciones es uan pareja de valores x y y que satisfacen la igualdad.

En la siguiente ecuación es fácil determinar los valores de x y y que la satisfacen: $X + y = 2$

La solución seria: $x = 1.5$ y $y = 0.5$ también es una solución. Procediendo de esta manera podemos determinar un numero infinito de soluciones.

El procedimiento para encontrar todas las parejas de valores de x y y que constituyen el conjunto solución consiste en:

a) Despejar cualquiera de las variables.

b) Asignarle valores a la otra variable.

c) Determinar el valor que le corresponde a la variable que se despejo.

Ejemplo: Dada la ecuación $5x + y – 3= 0$, encontrar al menos tres soluciones:

a) se eligio despejar la variable y

$$y = -5x + 3$$

b) se le asigno los siguientes valores a x

$$x = 2, \qquad x= o \quad y \quad x= 3$$

(Los valores asignados a x son arbitrarios; es decir, no dependen ni estan condicionados; por esta razón se le conoce como la variable independiente.

c) se determino los valores de y que corresponden a los valores asignados a x.)

Si $x = -2$ $y = -5(-2) + 3$ $y = 13$

Si $x = 0$ $y = -5(0) + 3$ $y = 3$

Si $x = 3$ $y = -5(3) + 3$ $y = -12$

Soluciones:

$X = -2$	$x = 0$	$x = 3$
$Y = 13$	$y = 3$	$y = -12$

(Los valores y dependen de los valores asignados a x; por esta razón se le conoce cono variable dependiente.

Comprobación:

Sustituyendo la ecuación $5x + y - 3 = 0$ los valores de x y y, esta se debe satisfacer.

Para $x = 3$ y $y = -12$	para $x = -2$ y $y = 13$	para $x = 0$ y $y = 3$
$5(3) - 12 - 3 = 0$	$5(-2) + 13 - 3 = 0$	$5(0) + 3 - 3 = 0$
$15 - 15 = 0$	$-10 + 13 - 3 = 0$	$0 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$	